Aplikace stochastických procesů při oceňování finančních derivátů

Jiří Málek, katedra bankovnictví a pojišťovnictví, VŠE Praha

Obsah

- Základní údaje o opcích
- Binomický model a konvergence k Black-Scholesově formuli
- Citlivosti hodnot opcí
- Uplatnění amerických opcí
- Mertonův model na akcii se spojitou dividendou a jeho aplikace
- Hedging opčních pozic

Obsah

- Exotické opce (bariérové)
- Modely dynamiky úrokových měr
- Oceňování opcí se stochastickou volatilitou (Hestonův model)

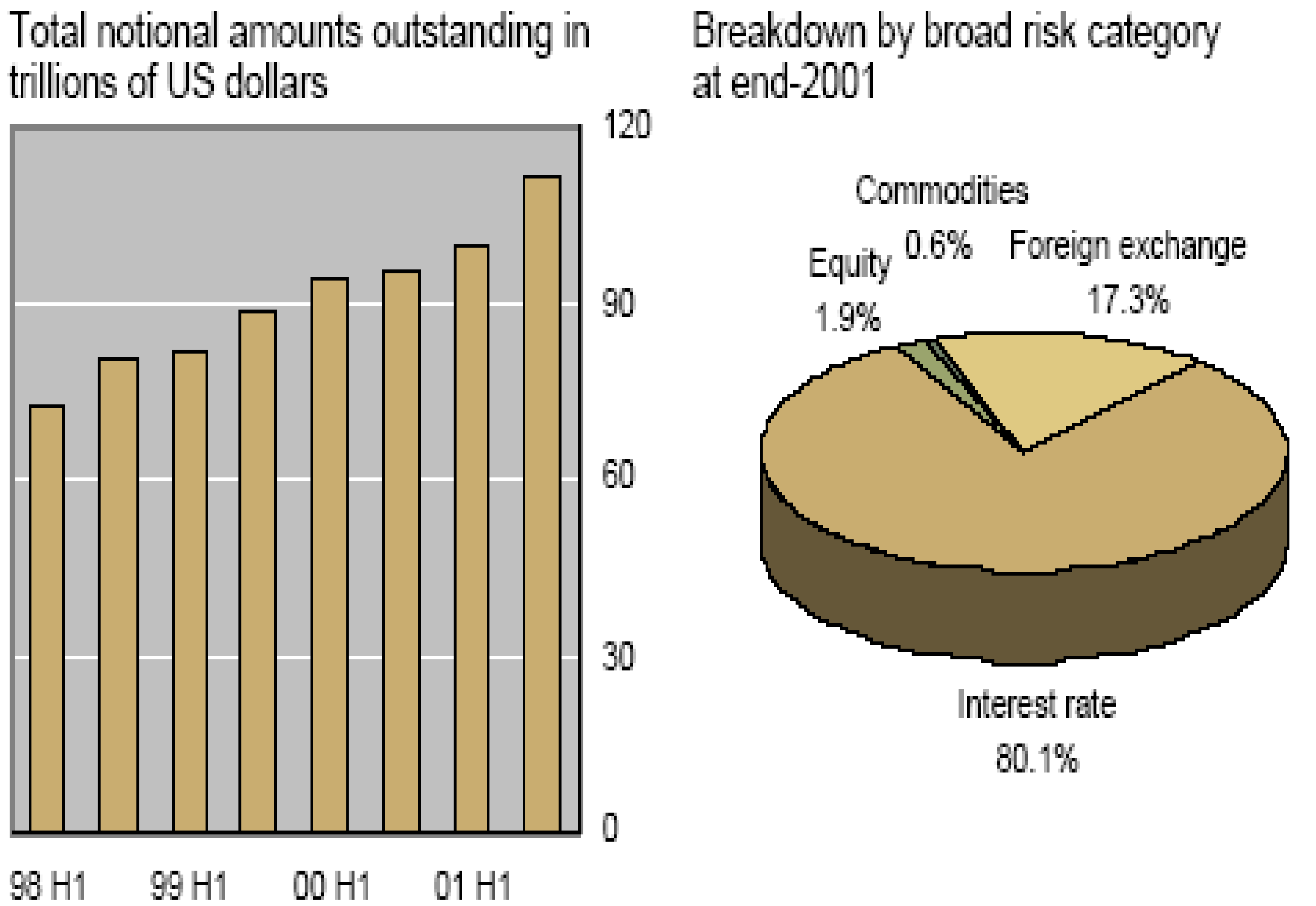
Opce (základní typy)

- Opce je právo (nikoli povinnost) prodat nebo koupit podkladový instrument za dohodnutou cenu
- Právo prodat - put opce
- Právo koupit - call opce
- Právo je možné uplatnit jen v čase expirace – evropská opce
- Právo je možné uplatnit kdykoli – americká opce

Podkladové instrumenty

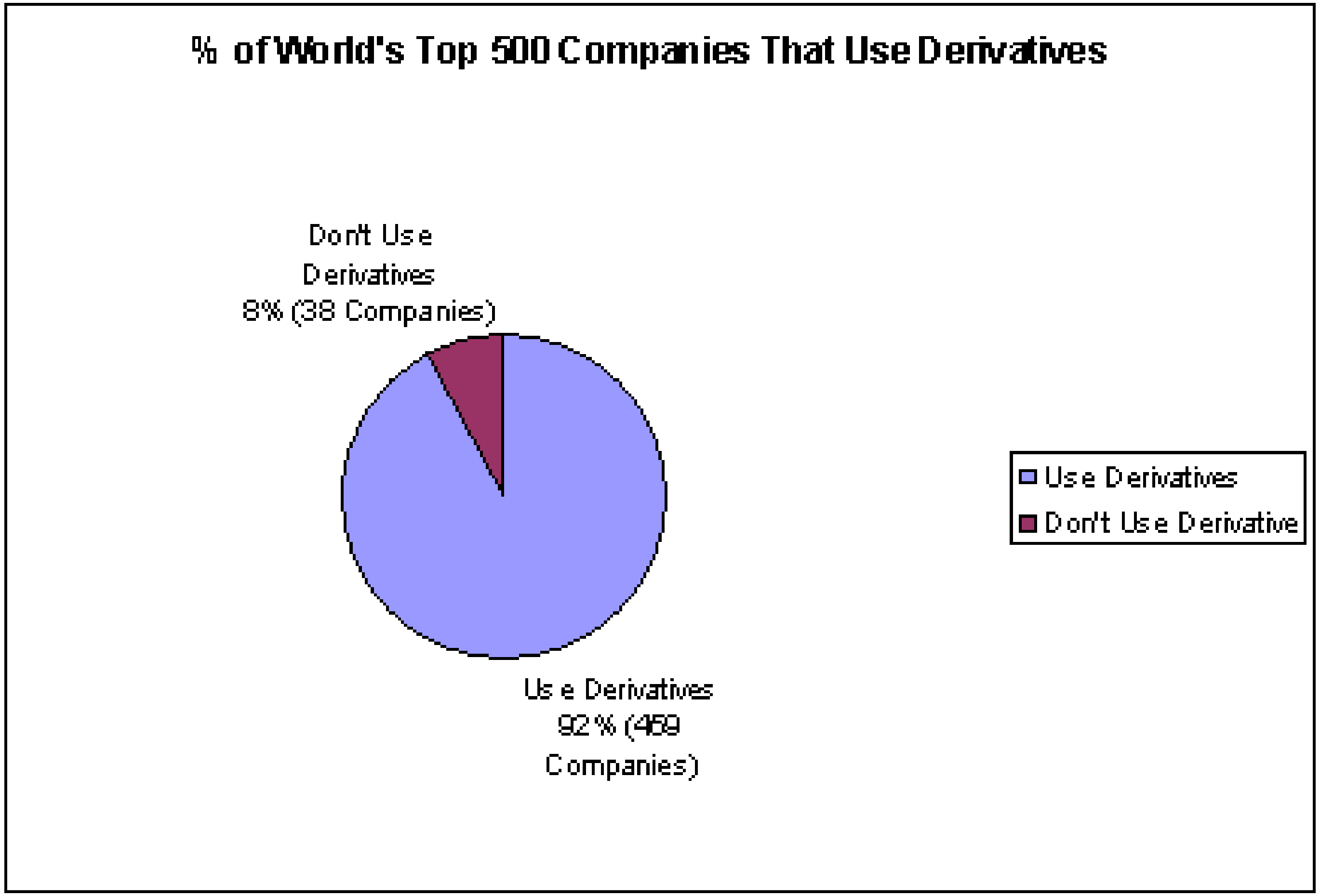
- Akcie
- Měna
- Dluhopis
- Komodita
- Jiný derivát (futures, swap)

Global OTC derivatives

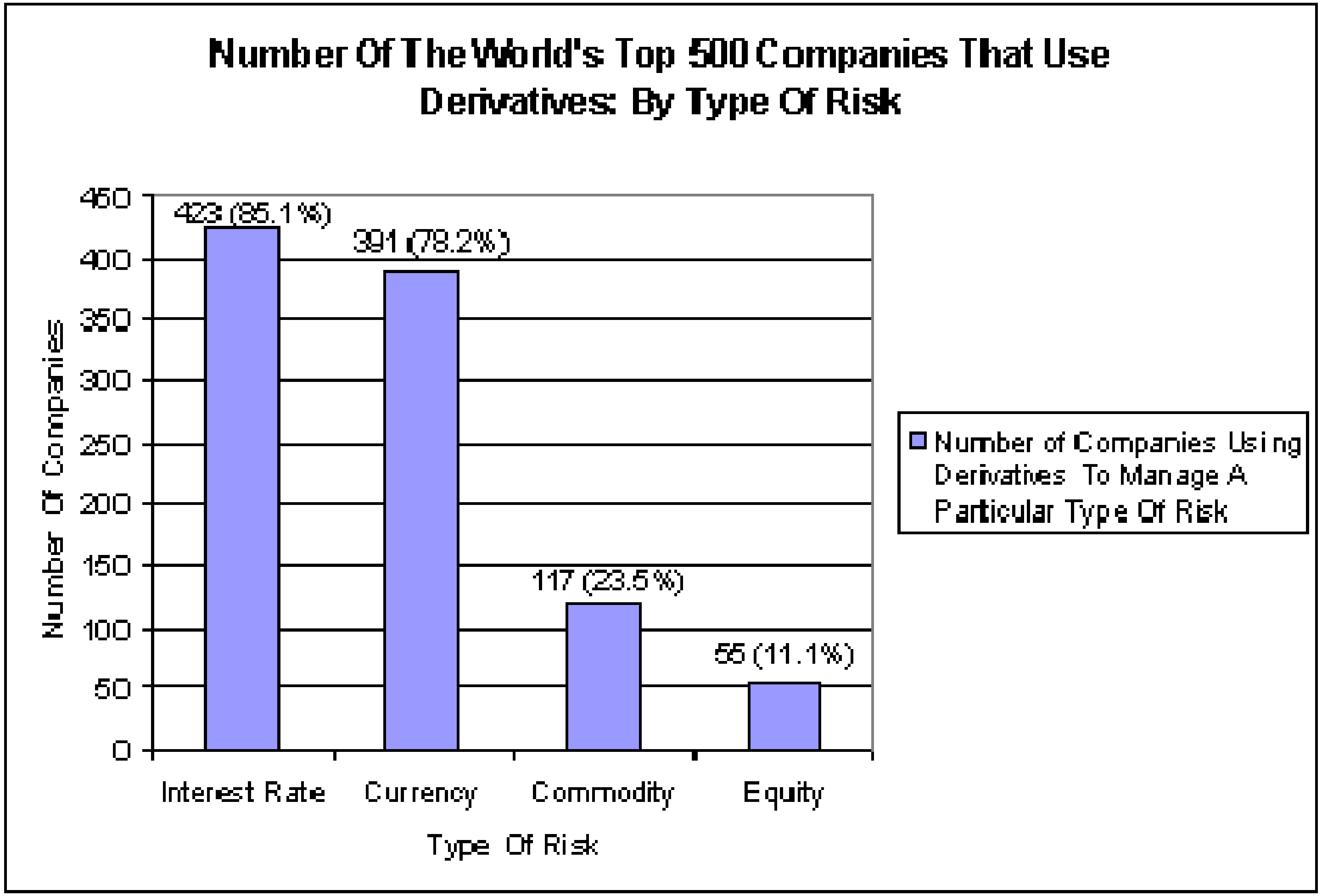


Source: BIS.

Graph 4.4


% of World's Top 500 Companies That Use Derivatives
Don't Use
Derivatives
8% (38 Companies)
Use Derivatives
92 % (459
Companies)
Use Derivatives
Don't Use Derivative

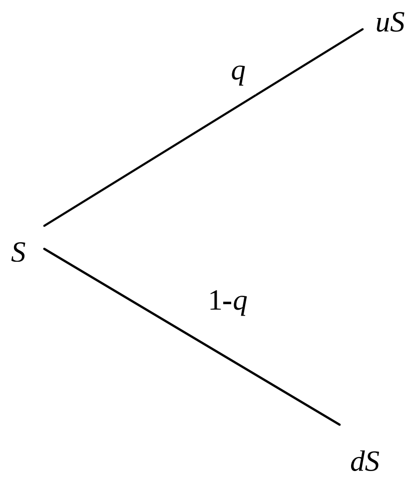
Zdroj: ISDA


Number Of The World's Top 500 Companies That Use Derivatives: By Type Of Risk
450
400
350
300
250
200
150
100
50
0
Number Of Companies
423 (85.1%)
391 (78.2%)
117 (23.5%)
55 (11.1%)
Interest Rate
Currency
Commodity
Equity
Type Of Risk
Number of Companies Using Derivatives To Manage A Particular Type Of Risk

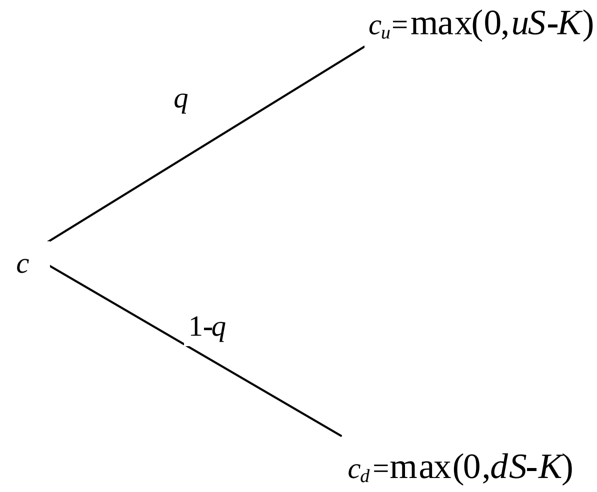
Zdroj: ISDA

Binomický model

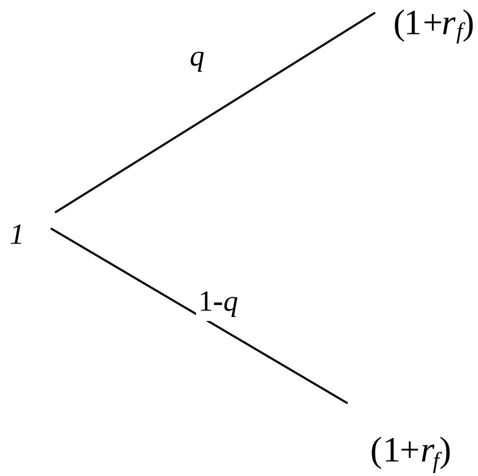
- Cena (hodnota) opce je určena na základě arbitrážních vztahů
- Mějme tři cenné papíry – akcii, bond, opci
- Kurz akcie může v následujícím okamžiku buď vzrůst nebo klesnout
- Pomocí určitého množství akcií a bondů vytvoříme portfolio, které se bude chovat jako opce



uS
q
S
$1-q$
dS



$c_u = \max(0, uS-K)$
q
c
$1-q$
$c_d = \max(0, dS-K)$



$(1+r_f)$
q
1
$1-q$
$(1+r_f)$

Binomický model

- Replikující portfolio

$$uS\Delta + B\left(1 + r_f\right) = c_u$$

$$dS\Delta + B\left(1 + r_f\right) = c_d$$

- Δ…počet akcií (neznámá)
- B…velikost bezrizikové investice (neznámá)

Binomický model

- Řešením rovnic je

$$\Delta = \frac{c_u - c_d}{uS - dS}$$

$$B = \frac{c_d uS - c_u dS}{(uS - dS)\left(1 + r_f\right)}$$

- Jelikož se portfolio v koncovém čase chová přesně jako opce, musí být jeho hodnota na počátku rovna hodnotě opce. V opačném případě by existovala možnost arbitráže:

$$c = \Delta S + B = \frac{\dfrac{\left(1 + r_f\right) - d}{u - d} c_u + \dfrac{u - \left(1 + r_f\right)}{u - d} c_d}{1 + r_f}$$

Binomický model

- Nyní si zaveďme substituci

$r = 1 + r_f$

$$p = \frac{r-d}{u-d}.$$

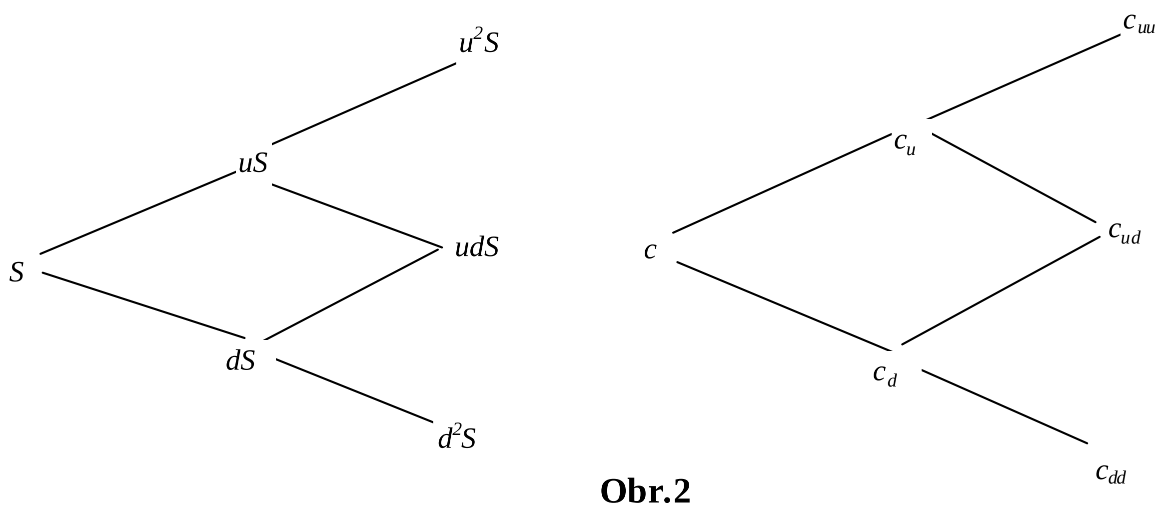
Jednoduchými úpravami dostaneme cenu opce jako diskontovanou střední hodnotu

$$c = \frac{\left[pc_u + (1-p)c_d \right]}{r}$$

p je tzv. rizikově neutrální pravděpodobnost

Binomický model

- ***Rozšíření na více časových období***



Obr.2

Binomický model

Rozšíření na více časových období

- Postupná aplikace jednoperiodického modelu
- Nejdříve najdeme c_u, a c_d

$$c_u = \frac{\left[pc_{uu} + (1-p)c_{ud}\right]}{r}$$

$$c_d = \frac{\left[pc_{ud} + (1-p)c_{dd}\right]}{r}$$

Hodnota opce na počátku je

$$c = \frac{\left[pc_u + (1-p)c_d\right]}{r} = \frac{\left[p^2 c_{uu} + 2p(1-p)c_{ud} + (1-p)^2 c_{dd}\right]}{r^2}$$

Binomický model

Rozšíření na více časových období

- Zobecněním na *n* period dostáváme

$$c = \left\{ \sum_{j=0}^{n} \frac{n!}{j!\left(n-j\right)!} p^{j} \left(1-p\right)^{n-j} c_{u^{j} d^{n-j}} \right\} * r^{-n}$$

Binomický model

Konvergence k Black-Scholesově formuli

- Dosazením za *u* a *d*

$$u = e^{\sigma\sqrt{T/n}}$$

$$d = e^{-\sigma\sqrt{T/n}}$$

a limitou *n* do nekonečna dostáváme Black –Scholesovu formuli pro ocenění opcí

$$\text{call}(S,T,K) = SN(d) - Ke^{-r_f T} N\left(d - \sigma\sqrt{T}\right)$$

Black-Scholesova formule

- $$\text{call}(S,T,K) = SN(d) - Ke^{-r_f T} N\left(d - \sigma\sqrt{T}\right)$$

S ... současná cena akcie
K ... realizační cena
T ... čas zbývající do uplatnění (expirace) opce

σ ... volatilita akcie
N(.) ... distribuční funkce normalizovaného normálního rozdělení:
r_f .... bezriziková úroková míra ...

$$N(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right) dx$$

$$d = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} ln\left(\frac{S}{e^{-r_f T} K}\right) + \sigma \frac{\sqrt{T}}{2}$$

Příklad (Ambrož, Oceňování opcí)

Ocenění kupní opce na akcii

Cena akcie 1000Kč

Realizační cena 1000Kč

Čas do expirace 6 měsíců

Úroková míra 8%

Volatilita 30%

a)**Počet period 2**

$$u = e^{\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}} = e^{0,3\sqrt{\frac{0,5}{2}}} = 1,1618$$

$$d = e^{-\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}} = e^{-0,3\sqrt{\frac{0,5}{2}}} = 0,8607$$

$$p = \frac{e^{r\frac{T}{n}} - d}{u - d} = 0,5297$$

$$call = 94,2994$$

Příklad (pokr.)

b)**Počet period 24**

$$u = e^{\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}} = e^{0,3\sqrt{\frac{0,5}{24}}} = 1,0443$$

$$d = e^{-\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}} = e^{-0,3\sqrt{\frac{0,5}{2}}} = 0,9576$$

$$p = \frac{e^{r\frac{T}{n}} - d}{u - d} = 0,5084$$

$$call = 103,0089$$

c) **Počet period 183**

$$call = 103,9878$$

d) **Black –Scholes**

$$\mathrm{call}(S,T,K) = SN(d) - Ke^{-r_f T} N\left(d - \sigma\sqrt{T}\right) = 1000N(d) - 1000e^{-0,08\times 0,5} N\left(d - 0,3\sqrt{0,5}\right)$$

$$d = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \ln\left(\frac{S}{e^{-r_f T} K}\right) + \sigma\frac{\sqrt{T}}{2} = \frac{1}{0,3\sqrt{0,5}} \ln\left(\frac{1000}{e^{-0,08\times 0,5}1000}\right) + 0,3\frac{\sqrt{0,5}}{2}$$

$$call\left(1000,\ 0.5,\ 1000\right) = 103,8813$$

Výpočet volatility

- Mějme časovou řadu kurzů akcie (např. denní uzavírací ceny):

$$S_0, S_1, S_2 \ldots S_n$$

Potom denní volatilita je

$$\hat{\sigma}_D = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(r_i - \overline{r}\right)^2}$$

kde

$$r_i = \ln\left(\frac{S_i}{S_{i-1}}\right)$$

$$\overline{r_i} = \sum_{i=1}^{n}\frac{r_i}{n}$$

Výpočet volatility

Roční volatilita je

$$\hat{\sigma}_R = \sqrt{253}\hat{\sigma}_D$$

Kdybychom vycházeli např. z týdenní časové řady (interval mezi kurzy je 1 týden, pak

$$\hat{\sigma}_R = \sqrt{52}\hat{\sigma}_T$$

Implikovaná volatilita

$$\text{call}\left(S,T,K\right)=SN\left(d\right)-Ke^{-r_fT}N\left(d-\sigma\sqrt{T}\right)\qquad\text{(BS)}$$

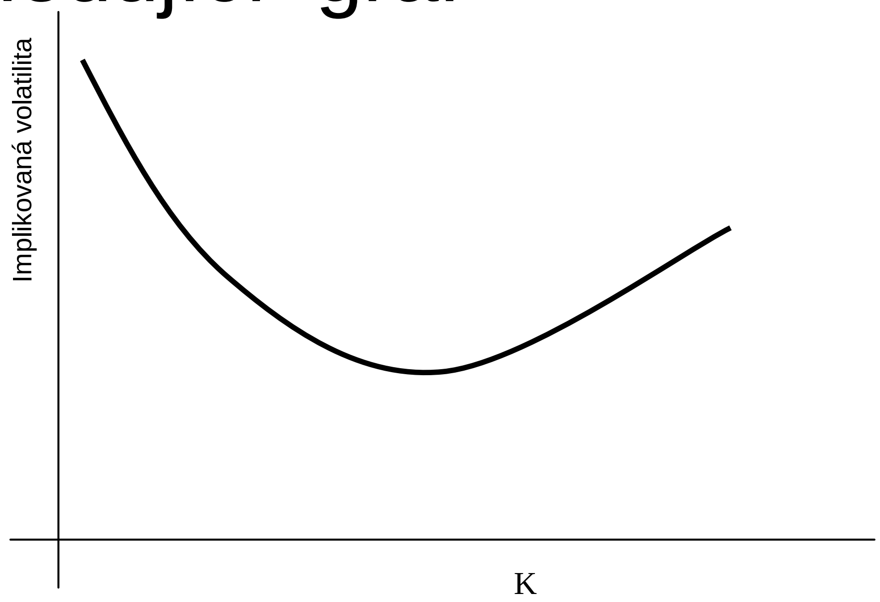
$$N(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z}\exp\left(\frac{-x^2}{2}\right)dx$$

$$d=\frac{1}{\sigma\sqrt{T}}ln\left(\frac{S}{e^{-r_fT}K}\right)+\sigma\frac{\sqrt{T}}{2}$$

Na levou stranu BS vzorce položíme tržní cenu opce a volatilitu bereme jako neznámou. Takto vypočítaná volatilita se nazývá **implikovaná**

Volatility smile

- Pokud pro různé realizační ceny vypočítáme z tržních cen opcí implikovanou volatilitu, dostaneme obvykle následující graf



Volatilita

- Pokud by platily předpoklady BS modelu,musel by být graf implikované volatility horizontální přímka
- Příčinou je stochastický charakter volatility,skoky….
- Modely beroucí v úvahu stochastickou volatilitu:

  Heston, Stein&Stein, Hull-White a další

Put- call parita pro evropské opce

- Nechť call(S,T,K) a put(S,T,K) jsou hodnoty evropské kupní a evropské prodejní opce vypsané na stejný instrument, jehož momentální cena je S, se stejnou dobou do expirace T a stejnou realizační cenou K. Pak
- call(S,T,K) $+Ke^{-rT}=$ put(S,T,K)$+S$.

Put- call parita-důkaz

	Současnost		Budoucnost(okamžik expirace)	
			$S^* \leq K$	$S^* > K$
vypsaná call	-call(S,T,K)		*0*	$-(S^*-K)$
koupená put	put(S,T,K)		K-S	*0*
koupená akcie	S		S^*	S^*
bezriziková výpůjčka	$-Ke^{-rT}$		$-K$	$-K$
celkem	0	$\Leftarrow$	0	0

Hodnota put opce

- Podle put-call parity platí

$$\text{put}(S, T, K) = \text{call}(S, T, K) - S + Ke^{-rT}.$$

Dosazením za call z BS formule máme

$$\text{put}(S, T, K) = Ke^{-rT} N\left(-d + \sigma\sqrt{T}\right) - SN(-d),$$

Použití put-call parity

- Syntetický krátký prodej akcie:

$$-S = \mathrm{put}\left(S,T,K\right) - \mathrm{call}\left(S,T,K\right) - Ke^{-r_f T}.$$

Uplatnění amerických opcí

- Call opce

  Platí

V každý okamžik kromě doby těsně před výplatou dividendy a času expirace platí pro hodnotu C americké call opce C>S-K.

Důsledky

•Pokud akcie nevyplácí dividendu (během života opce), pak má smysl ji uplatnit jen v čase expirace. Jinak je lepší ji prodat

•Taková opce se chová jako evropská a je možno ji ocenit BS formulí

•Americkou opci na akcii s dividendou má smysl uplatnit jen těsně před výplatou dividendy nebo v čase expirace

Uplatnění amerických opcí

- Kritérium pro uplatnění

Pokud těsně pře výplatou dividendy (exdividendy) platí

$$S_t\text{-}K > \mathrm{Call}(S_t\text{-}D, T\text{-}t, K).$$

Důsledky

•Existuje minimální uplatňovací hranice $\underline{S}$

•Jestliže platí $S>\underline{S}$ je opce uplatněna

•Tuto hranici je možné si spočítat předem

Ocenění amerických opcí je obtížné, neexistuje explicitní vzorec. Lze použít binomický model nebo vzorce přibližné

Citlivost hodnot opcí (Greeks)

Evropská call opce

$$\Delta_C = \frac{\partial \text{call}(S,T,K)}{\partial S} = N(d) > 0$$

$$\theta_c = -\frac{\partial \text{call}(S,T,K)}{\partial T} = -\frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \frac{S\sigma e^{-\frac{1}{2}(d)^2}}{\sqrt{T}} - r_f e^{-r_f T} KN\left(d - \sigma\sqrt{T}\right) < 0$$

$$\upsilon_c = \frac{\partial \text{call}(S,T,K)}{\partial \sigma} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} ST\sqrt{T} e^{-\frac{1}{2}d^2} > 0$$

$$\rho_c = \frac{\partial \text{call}(S,T,K)}{\partial r_f} = KTe^{-r_f T} N\left(d - \sigma\sqrt{T}\right) > 0$$

Citlivost hodnot opcí (Greeks)

Evropská put opce

$$\Delta_p = \frac{\partial \mathrm{put}(S,T,K)}{\partial S} = N(d) - 1 < 0$$

$$\theta_p = -\frac{\partial \mathrm{put}(S,T,K)}{\partial T} = -\frac{1}{2\sqrt{2\pi T}} S\sigma e^{-\frac{1}{2}d^2} + r_f e^{-r_f T} KN\left(-d + \sigma\sqrt{T}\right) \begin{matrix}\le \\ 0 \\ \ge\end{matrix}$$

$$\upsilon_p = \frac{\partial \mathrm{put}(S,T,K)}{\partial \sigma} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} ST\sqrt{T} e^{-\frac{1}{2}d^2} > 0$$

$$\rho_p = \frac{\partial \mathrm{put}(S,T,K)}{\partial r_f} = -e^{-r_f T} KTN\left(-d + \sigma\sqrt{T}\right) < 0$$

Black –Scholesova rovnice
Riziková neutralita

Black –Scholesova rovnice

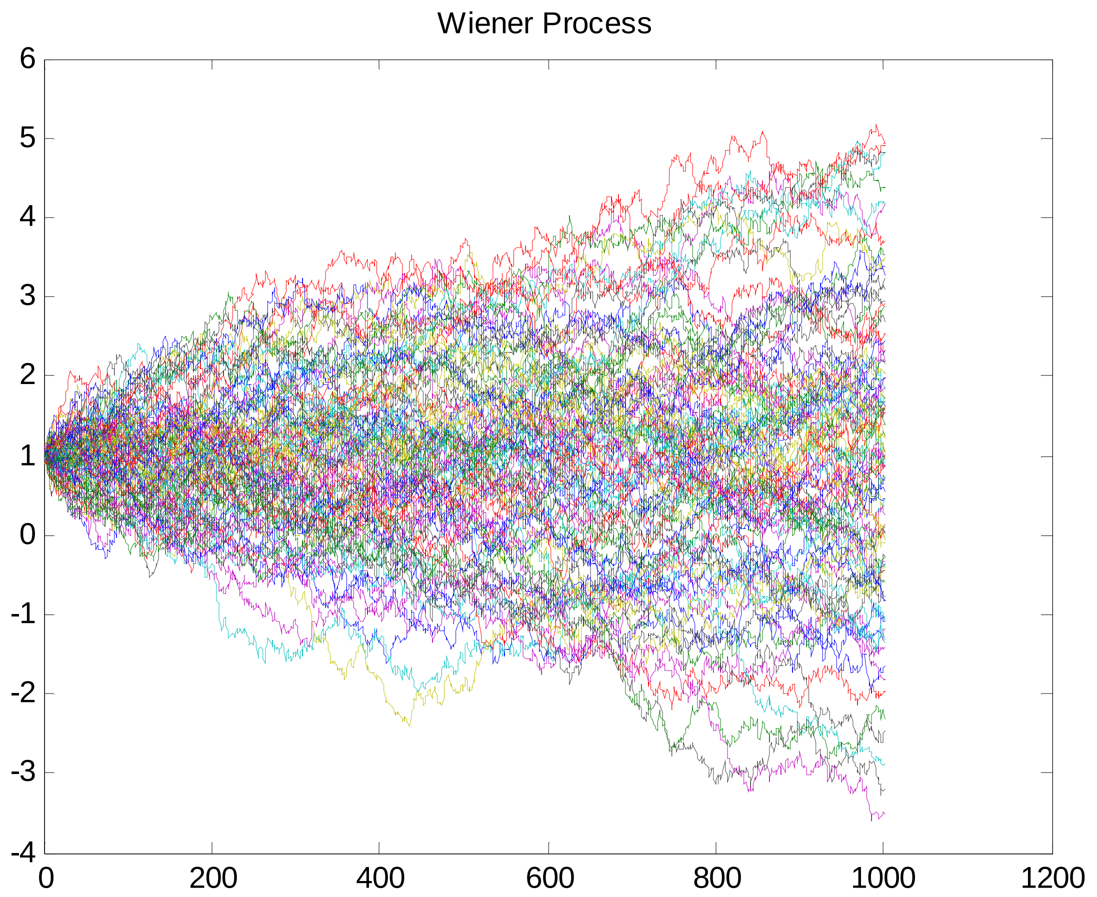
Nechť vývoj ceny akcie se řídí stochastickým procesem

$$\mathrm{d}S(t) = \mu S(t)\mathrm{d}t + \sigma S(t)\mathrm{d}W(t)$$

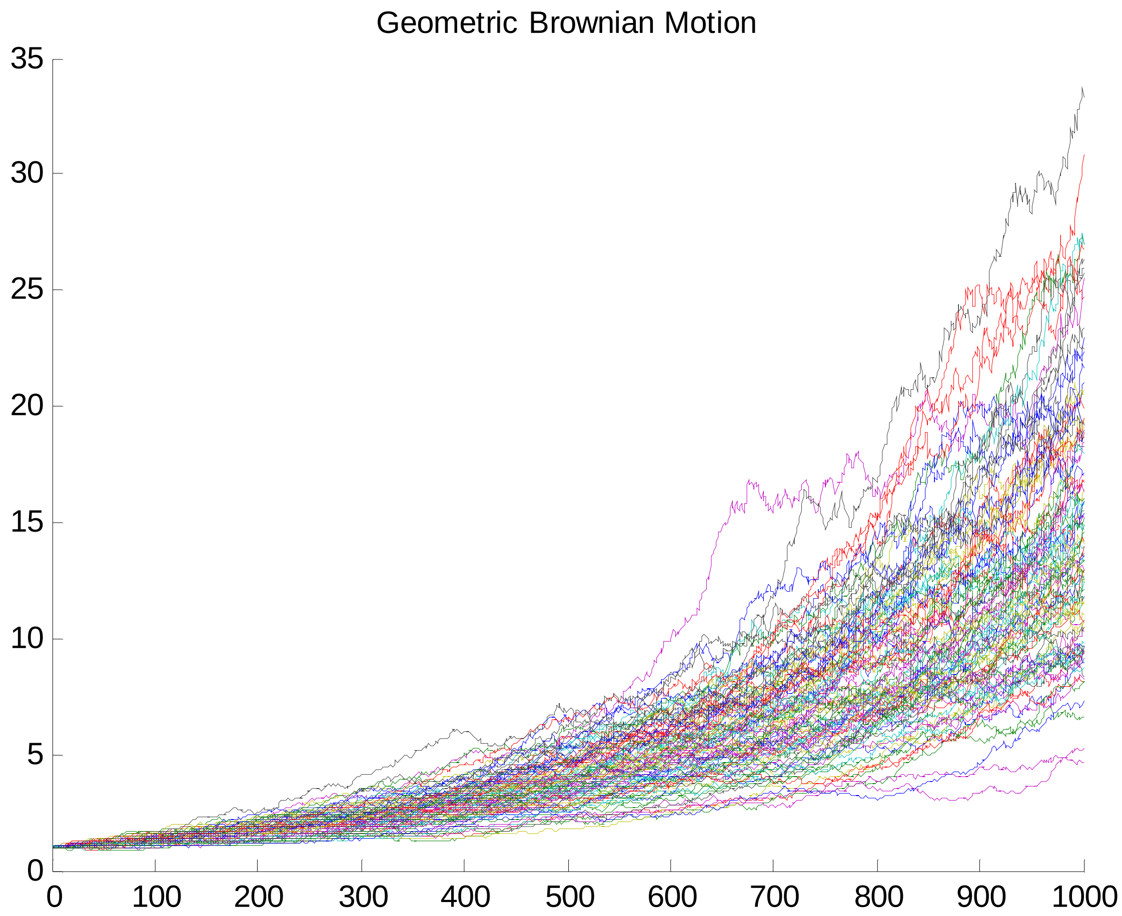
Předpokládejme, že cena derivátu *f* závisí pouze na čase a na ceně podkladové akcie. Tedy

$$f = f\left(t, S(t)\right).$$

Simulace Wienerova procesu (Brownova pohybu)



Simulace geometrického Brownova pohybu

- 

Itoova formule

Motivace

Mějme diferencovatelnou funkci reálných proměnných $f(t,x)$. Potom přírůstek df můžeme vyjádřit podle Tailorova rozvoje

$$df = f(t+dt, x+dx) = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial x} dx + \text{členy vyššího řádu}$$

Členy vyššího řádu se většinou zanedbávají.

Pokud bude x Wienerův proces, je nutno brát v úvahu i člen vyššího řádu, protože $dW_t dW_t = dt$:

$$df = f(t+dt, W_t + dW_t) = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial x} dW_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dt$$

což je Itoova formule

Black –Scholesova rovnice

Podle Itoovy formule je přírůstek ceny derivátu v závislosti na přírůstku ceny akcie roven

$$\mathrm{d}f = \left[\frac{\partial f}{\partial S}\mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right]\mathrm{d}t + \frac{\partial f}{\partial S}\sigma S \,\mathrm{d}W$$

$$= \frac{\partial f}{\partial S}\mathrm{d}S + \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)\mathrm{d}t.$$

Black –Scholesova rovnice

Vytvořme portfolio, které se bude skládat z -1 množství derivátu (krátká pozice) a z

$$+\frac{\partial f}{\partial S}$$

množství akcie. Hodnota portfolia *P* je tedy

$$P = -f + \frac{\partial f}{\partial S} S \qquad (1.3)$$

Black –Scholesova rovnice

Přírůstek hodnoty portfolia v závislosti na přírůstku ceny akcie je

$$\mathrm{d}P = -\mathrm{d}f + \frac{\partial f}{\partial S}\mathrm{d}S$$

Dosazením za d*f* a d*S* dostáváme

$$\mathrm{d}P = -\left[\frac{\partial f}{\sigma S}\mathrm{d}S + \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)\mathrm{d}t\right] + \frac{\partial f}{\partial S}\mathrm{d}S \qquad (1.4)$$

$$= -\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)\mathrm{d}t.$$

Black –Scholesova rovnice

Je vidět, že přírůstek hodnoty portfolia neobsahuje náhodnou složku, a tudíž je portfolio bezrizikové. Z toho důvodů musí být jeho výnos za dobu d*t* bezrizikový. Neboli

$$\mathrm{d}P = \mathrm{P}r_f \, \mathrm{d}t.$$

Dosazením za *dP* z (1.4) , za *P* z (1.3) a vynásobením -1 dostáváme

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) \mathrm{d}t = r_f \left(f - \frac{\partial f}{\partial S} S \right) \mathrm{d}t$$

neboli po úpravě

$$r_f S \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} + \frac{\partial f}{\partial t} - r_f f = 0$$

Black –Scholesova rovnice

Tato rovnice se nazývá Black-Scholesova parciální diferenciální rovnice a splňuje ji hodnota každého derivátu závisející pouze na čase a ceně podkladové akcie. Řešení pro konkrétní derivát závisí na okrajových podmínkách. Např. pro call opci je okrajová podmínka

$$call\left(S,0,K\right)=\max\left(0,S_T-K\right)$$

Black –Scholesova rovnice

- Řešením je Black – Scholesova formule

$$\mathrm{call}(S,T,K) = SN(d) - Ke^{-r_f T} N\left(d - \sigma\sqrt{T}\right)$$

kde

$$d = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \ln\left(\frac{S}{e^{-r_f T} K}\right) + \sigma\frac{\sqrt{T}}{2}$$

.

$$N(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right) dx$$

Lze se snadno přesvědčit, že formule splňuje
Black – Scholesovu parciální diferenciální rovnici.

Riziková neutralita

- Aparát rizikové neutrality umožňuje vyjádřit cenu derivátu jako (diskontovanou) střední hodnotu při tzv. rizikově neutrálních (martingalových) pravděpodobnostech.
- To následně dává možnost oceňovat finanční deriváty metodou Monte - Carlo

Riziková neutralita

- **Numeraire**

Výchozím krokem metodiky je určení vhodné měřící jednotky, v které budeme měřit hodnotu daného aktiva. Tato měřící jednotka se nazývá *numeraire.* V této kapitole zvolíme za *numeraire* peněžní účet (money account). Za *numeraire* je možné ve vhodných situacích volit i jiná aktiva (bond, akcie), což může usnadnit výpočty.

Riziková neutralita

Nechť r(t) je bezriziková úroková míra v čase t. Na počátku v čase t=0 uložme jednu peněžní jednotku, která se bude zhodnocovat pomocí spojitého úročení. To znamená, že za malý časový okamžik si peněžní jednotka připíše úrok r(t)dt. Označme hodnotu tohoto peněžního účtu B(t) . Potom se řídí rovnicí

$$\mathrm{d}B(t) = r(t)B(t)\mathrm{d}t$$

Řešením této rovnice je

$$B(t) = e^{\int_0^t r(s)\mathrm{d}s}$$

Riziková neutralita

Jestliže cena aktiva $S(t)$ *sleduje proces*

$$\mathrm{d}S = aS\mathrm{d}t + \sigma S\mathrm{d}W,$$

pak proces $Z(t) = \dfrac{S(t)}{B(t)}$, *kde* $B(t)$ *je definováno pomocí (2.1), je řízen stochastickou diferenciální rovnicí*

$$\mathrm{d}Z = (a - r)Z\mathrm{d}t + \sigma Z\mathrm{d}W.$$

Riziková neutralita

Důkaz. Použitím vícerozměrné Itoovy formule, kde základní vstupy jsou:

$$f\left(x,y\right)=\frac{x}{y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{y} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{x}{y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2\frac{x}{y^3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}=-\frac{1}{y^2}$$

dostáváme

$$\mathrm{d}Z=\frac{1}{B}\mathrm{d}S-\frac{S}{B^2}\mathrm{d}B+2\frac{1}{B^3}\left(\mathrm{d}B\right)^2-2\frac{1}{B^2}\left(\mathrm{d}S\mathrm{d}B\right)=a\frac{S}{B}\mathrm{d}t+\sigma\frac{S}{B}\mathrm{d}W-\frac{S}{B^2}rB\mathrm{d}t$$

$$=\left(a-r\right)Z\mathrm{d}t+\sigma Z\mathrm{d}W,$$

Riziková neutralita

2.2 Girsanovova věta

Věta 2.1 *Nechť* $W(t),\ 0 \le t \le T$ *je Wienerův proces vzhledem k pravděpodobnostní míře* P *a nechť* $\lambda(t)$ *je náhodný proces takový, že*

$$Y(t) = \exp\left\{ -\frac{1}{2}\int_0^t \lambda^2(u)\mathrm{d}u - \int_0^t \lambda(u)\mathrm{d}W(u) \right\} \tag{2.3}$$

je martingal. Definujme novou pravděpodobnostní míru Q *takovou, že*

$$\mathrm{d}Q(\omega) = Y(T)\mathrm{d}P(\omega).$$

Potom náhodný proces

$$\tilde{W}(t) = W(t) + \int_0^t \lambda(u)\mathrm{d}u$$

je Wienerovým procesem na intervalu $0 \le t \le T$ *vzhledem k pravděpodobnostní míře Q.*

Riziková neutralita

Aplikace

Jak jsme odvodili v lemmatu 2.1 sleduje proces

$$Z(t) = \frac{S(t)}{B(t)}$$

stochastickou diferenciální rovnici

$$\mathrm{d}Z = (a - r)Z\mathrm{d}t + \sigma Z\mathrm{d}W\,. \qquad (2.4)$$

Aplikujme nyní na tento proces Girsanovovu větu, kde

$$\lambda = \frac{a - r}{\sigma}\,.$$

Potom proces $\widetilde{W}(t) = W(t) + \lambda t$ je Wienerovým procesem při pravděpodobnostní míře

$$\mathrm{d}Q(\omega) = \exp\left\{-\frac{1}{2}\lambda^2 T - \lambda W(T)\right\}\mathrm{d}P(\omega)\,.$$

Riziková neutralita

Dosaďme v (2.4) za $W(t) = \tilde{W}(t) - \lambda t$. Dostáváme

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}Z &= (a - r)Z\mathrm{d}t + \sigma Z \mathrm{d}\tilde{W} - \sigma Z \lambda \mathrm{d}t \\
&= (a - r - \sigma\lambda)Z\mathrm{d}t + \sigma Z \mathrm{d}\tilde{W} \\
&= \sigma Z \mathrm{d}\tilde{W}.
\end{aligned}
$$

Řešením této rovnice je

$$
Z(t) = \exp\left(\frac{-\sigma^2 t}{2} + \sigma \tilde{W}(t) \right)
$$

Podle reprezentačního teorému je *Z*(*t*) martingal

Riziková neutralita

Důsledek. Dosazením za $Z(t) = S(t) \big/ B(t)$ snadnou úpravou dostáváme

$$S(t) = \mathrm{E}^{Q}_{t,S(t)}\left[e^{-\int_t^u r(s)ds} S(u) \right]. \tag{2.7}$$

V případě, že je úroková míra konstantní, vzorec se redukuje na

$$S(t) = e^{-r(u-t)} \mathrm{E}^{Q}_{t,S(t)}\left[S(u) \right].$$

Riziková neutralita

Aplikace na evropské call opce

Všechny předchozí úvahy lze provést pro derivát evropského typu, jehož cena v čase t je funkcí podkladového aktiva a času. Specielně pro evropskou call opci v Black-Scholesově modelu máme v čase expirace

$$C(T,S(T),K)=\max(0,S(T)-K).$$

Aplikací vzorce (2.7) dostáváme hodnotu opce v čase t

$$C(t,S(t),K)=e^{-r(T-t)}\mathrm{E}^{Q}_{t,S(t)}[\max(0,S(T)-K)].$$

Girsanovova transformace λ odpovídá tržní ceně rizika, a ta je stejná pro všechny deriváty typu *f(t,S)*

Mertonův model na akcii se spojitou dividendou

- Spojitá dividenda *q* (dividendový tok), znamená, že akcie vyplatí v malém časovém úseku dividendu o velikosti

$$S_t q \Delta t$$

Mertonův model na akcii se spojitou dividendou

- Cena call a put opce je pak rovna

$$\text{call}\left(\bar{S}(t), T-t, K\right) = e^{-q(T-t)}\bar{S}(t)N\left(d^{M}\right) - Ke^{-r_f(T-t)}N\left(d^{M} - \sigma\sqrt{T-t}\right)$$

$$\text{put}(\bar{S}(t), T-t, K) = Ke^{-r_f(T-t)}N\left(-d^{M} + \sigma\sqrt{T-t}\right) - e^{-q(T-t)}\bar{S}(t)N\left(-d^{M}\right)$$

kde

$$d^{M} = \frac{\ln\frac{\bar{S}(t)}{K} + \left(r - q + \sigma^2/2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

Při q=0 se model redukuje na klasický BS

Mertonův model na akcii se spojitou dividendou

Aplikace

- Opce na akciový index
- Měnové opce (q=zahraniční úroková míra)
- Opce na futures(pokud se jedná o futures na akcii, pak $q=r_f$)
- Komoditní opce

Příklad

- Předpokládejme měnovou call opci dolar/libra. Nominále je 1mil liber. Současný kurz je 1.60 (USD/L),

Domácí úroková míra (americká) je 8% , zahraniční (britská) je 11%, realizační cena je 1.60 USD/L. Doba expirace je 4 měsíce, volatilita kurzu je 14.%.

Opce tedy dává právo koupit za 4 měsíce 1mil liber za v kurzu 1,60USD

Vstupní údaje

- S=1.6
- K=1.6
- R_f=0.08
- q=0,11
- T-t=4/12

$$\sigma = 0{,}141$$

Dosazením do Mertonova vzorce dostáváme,

že cena opce je 0,043USD (na 1 libru). Tedy při nominále 1mil liber bude cena 43 000USD.

Delta hedging

- Delta opce je definovaná jako

$$\Delta_C = \frac{\mathrm{dcall}(S,T,K)}{\mathrm{d}S}$$

$\mathrm{dcall}(S,T,K)$ udává (malý) přírůstek ceny opce při malém přírůstku ceny akcie $\mathrm{d}S$

Zřejmě platí

$$\mathrm{dcall}(S,T,K) = \Delta_C \mathrm{d}S$$

Delta hedging

- Otázka

  Jestliže držíme k_c opcí, kolik musíme nakoupit akcií, aby celková změna hodnoty portfolia (akcie, opce) byla nulová?

Matematicky vyjádřeno

$$k_c d(call) + k_s (dS) = 0$$

Delta hedging

- Dosazením $d(\text{call}) = \Delta_c(dS)$

a jednoduchým výpočtem dostáváme

$$k_S = -\Delta_c k_c$$

Delta hedging

- Příklad

Předpokládejme, že jsme vypsali 100 akciových kupních opcí. Kolik akcií musíme nakoupit, abychom opční pozici zahedgovali, jestliže delta opce je 0,2?

Řešení

Jelikož jsme opce vypsali (krátká pozice), bude $k_c = -100$. Dosazením do vzorce dostáváme

$$k_S = -(-100) \times 0{,}2$$
$$= 20$$

Na zahedgování pozice 100 vypsaných kupních opcí musíme nakoupit 20 akcií

Delta hedging

- Obecná podmínka

Označme *Vj* hodnotu cenného papíru *j*- tého typu (např. různé typy opcí). Označme n_j počet cenných papírů *j*-tého typu obsažených v našem portfoliu. Jestliže je n_j kladné, znamená to, že jsme v daném papíru v dlouhé pozici, záporné n_j bude znamenat krátkou pozici. Hodnota portfolia je

$$V = n_1 V_1 + n_2 V_2 + \ldots + n_k V_k$$

Nechť $\Delta_j = \frac{\partial V_j}{\partial S}$,

Podmínka nulového delta portfolia je

$$n_1 \Delta_1 + n_2 \Delta_2 + \ldots + n_k \Delta_k = 0$$

Delta hedging

- Protože se delta v čase mění, musí dealer pozici nulového delta neustále upravovat.
- To vede k transakčním nákladům.
- Aby je minimalizoval může zaujmout pozici nulového gama

$$n_1\Gamma_1 + n_2\Gamma_2 + ... + n_k\Gamma_k = 0.$$

$$\Gamma = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = \frac{\partial \Delta}{\partial S}$$

Obecný hedging

- Dealer se může zahedgovat rovněž proti změně volatility, pohybu času či změně úrokové míry

$$n_1\Delta_1 + n_2\Delta_2 + \ldots + n_k\Delta_k = 0$$

$$n_1\upsilon_1 + n_2\upsilon_2 + \ldots + n_k\upsilon_k = 0$$

$$n_1\rho_1 + n_2\rho_2 + \ldots + n_k\rho_k = 0$$

$$n_1\theta_1 + n_2\theta_2 + \ldots + n_k\theta_k = 0$$

Jedná se o čtyři rovnice o k neznámých, které mají většinou při dostatečném počtu různých druhů cenných papírů (opcí) v portfoliu netriviální řešení

Bariérové opce

Způsoby oceňování(podobně jako u klasických (plain vanila) opcí

- Metoda rizikové neutrality (použití metody Monte Carlo)
- Řešení parciální diferenciální rovnice (s příslušnými hraničními podmínkami)
- Metoda replikace

(opce se replikuje pomocí vhodných, již obchodovaných instrumentů)

- Explicitní vzorce, pokud existují, jsou pro exotické opce většinou velmi složité

Hodnota up-and-out call opce

$$V = S\left[N\left(\delta_+\left(\frac{S}{K}\right)\right) - N\left(\delta_+\left(\frac{S}{B}\right)\right)\right]$$
$$- e^{-rT}K\left[N\left(\delta_-\left(\frac{S}{K}\right)\right) - N\left(\delta_-\left(\frac{S}{B}\right)\right)\right]$$
$$- B\left(\frac{S}{B}\right)^{-2r/\sigma^2}\left[N\left(\delta_+\left(\frac{B^2}{KS}\right)\right) - N\left(\delta_+\left(\frac{B}{S}\right)\right)\right]$$
$$+ e^{-rT}K\left(\frac{S}{B}\right)^{-2r/\sigma^2+1}\left[N\left(\delta_-\left(\frac{B^2}{KS}\right)\right) - N\left(\delta_-\left(\frac{B}{S}\right)\right)\right]$$

kde

$$\delta_\pm(s) = \frac{\ln s + (r \pm \frac{1}{2}\sigma^2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

$$N(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

Bariérové opce
Příklad 1

- Předpokládejme exportní firmu, jejíž tržby v eurozóně jsou měsíčně 10mil euro. Firma má obavy z poklesu kurzu Kč/Euro, což by vedlo ke ztrátám při zpětné konverzi Eura na koruny a chce se proti tomuto riziku zabezpečit. Odmítne měnový forward, neboť chce profitovat z případného příznivého vývoje. Uvažuje proto o koupi vhodné opce

Příklad 1(pokr.)

- Základní údaje
- Momentální kurz Kč/Euro=26Kč
- Volatilita kurzu 20%
- Čas maturity 1měsíc
- Domácí úroková míra r_f=1,6% (1m Pribor)
- Zahraniční úroková míra r_z=0,2%

Příklad 1(pokr.) Scénář 1

- Firma očekává pokles kurzu, nemá žádnou představu, jak velký to má pokles být
- Koupí si (klasickou) prodejní opci na Eura s realizačním kurzem K=25.50Kč/Euro.

Příklad 1(pokr.)
Scénář 1

Asset price (S)	26.00
Strike price (X)	25.50
Cash rebate (K)	0.00
Time to maturity (T)	0,0833(1m)
Risk-free rate (r)	1.40%
Cost of carry (b)	1.60%
Volatility (σ)	20.00%
Value	**0,1038**

Hodnota put opce na prodej 1Eura je 0,1038Kč

Jelikož nominále bylo 10mil Euro, bude hodnota opce 1 038 000Kč

Upozornění

Pokud přičteme náklady na opci, bude se strategie vyplácet až po poklesu kurzu pod 25,3962 Kč/Euro

Příklad 1(pokr.)
Scénář 2

- Firma předpokládá, že kurz neklesne pod 25Kč/Euro. Aby ušetřila náklady, koupí si knock-out-down put opci s bariérou 25Kč/Euro a realizačním kurzem K=25.50Kč/Euro

Asset price (S)	**26.00**
Strike price (X)	**25.50**
Barrier (H)	**25.00**
Time to maturity (T)	**0.08**
Risk-free rate (r)	**1.60%**
Cost of carry (b)	**1.40%**
Volatility (σ)	**10.00%**
Value	**0.0161**

Hodnota opce při nominále 10mil Euro, realizačním kurzem 25.50Kč/Euro a bariérou 25Kč/Euro je 161 000Kč.

Opce se vyplatí při poklesu kurzu pod 25.4839 Kč/Euro

Existuje riziko, že při poklesu kurzu pod 25Kč/Euro bude opce bezcenná a firma utrpí větší ztráty než kdyby se nezabezpečila

Příklad 1(pokr.) Scénář 3

- Firma uvažuje následovně: Pokles kurzu pod 25.00Kč/Euro již může způsobit potíže. Nabízí se tedy klasická (plain vanila) put opce s realizačním kurzem 25Kč. Firma rovněž očekává vysokou volatilitu kurzu, což znamená, že kurz s velkou pravděpodobností může v průběhu měsíce klesnout pod 25.00Kč/Euro a zase se vrátit. Proto se rozhodne využít knoc-in-down put opci s bariérou 25.00Kč/Euro a realizační cenou 25.50Kč/Euro.

Příklad 1(pokr.)
Scénář 3

Asset price (S)	**26.00**
Strike price (X)	**25.50**
Barrier (H)	**25.00**
Time to maturity (T)	**0.08**
Risk-free rate (r)	**1.60%**
Cost of carry (b)	**1.40%**
Volatility (σ)	**20.00%**
Value	**0.3608**

Cena opce bude 3 608 000Kč.

Pokud by si firma koupila klasickou put opce s realizační cenou 25Kč/Euro pak by její cena byla 2 105 000Kč. Nicméně předchozí opce umožňuje případně profitovat (při proražení bariéry) z poklesu kurzu již pod 25.50Kč

Pokud by si firma koupila klasickou put opci s realizační cenou 25.50Kč/Euro pak by její cena byla 3 650 000Kč

Příklad 1(pokr.)
Scénář 4

- Firma si není jistá, kterým směrem se bude kurz ubírat. Nicméně uvažuje, že v případě, že překročí hranici 27.00Kč/Euro, pak je již nepravděpodobné, že by ve zbytku času klesl pod 25.00Kč/Euro. Proto si koupí knock-out-up put opci.

Úvod do moderní teorie úrokových derivátů

Vasickův model

Rovnice úrokové míry

$$dr(t) = a(b - r_t)\,dt + \sigma dW_t$$

b….. „Mean reversion“

a…. rychlost reverze

Řešení

$$r(t) = e^{-at} r(0) + b\left(1 - e^{-at}\right) + \int_0^t e^{-a(t-s)} \sigma dW(s)$$

Rovnice hodnoty bondu $P(r_t, t, T)$

$$dP = \left(\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial r}\left(a(b - r_t)\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial r^2}\sigma^2\right)dt + \frac{\partial P}{\partial r}\sigma dW_t$$

$$P(T,T) = 1$$

Vasickův model

Hodnota zero bondu

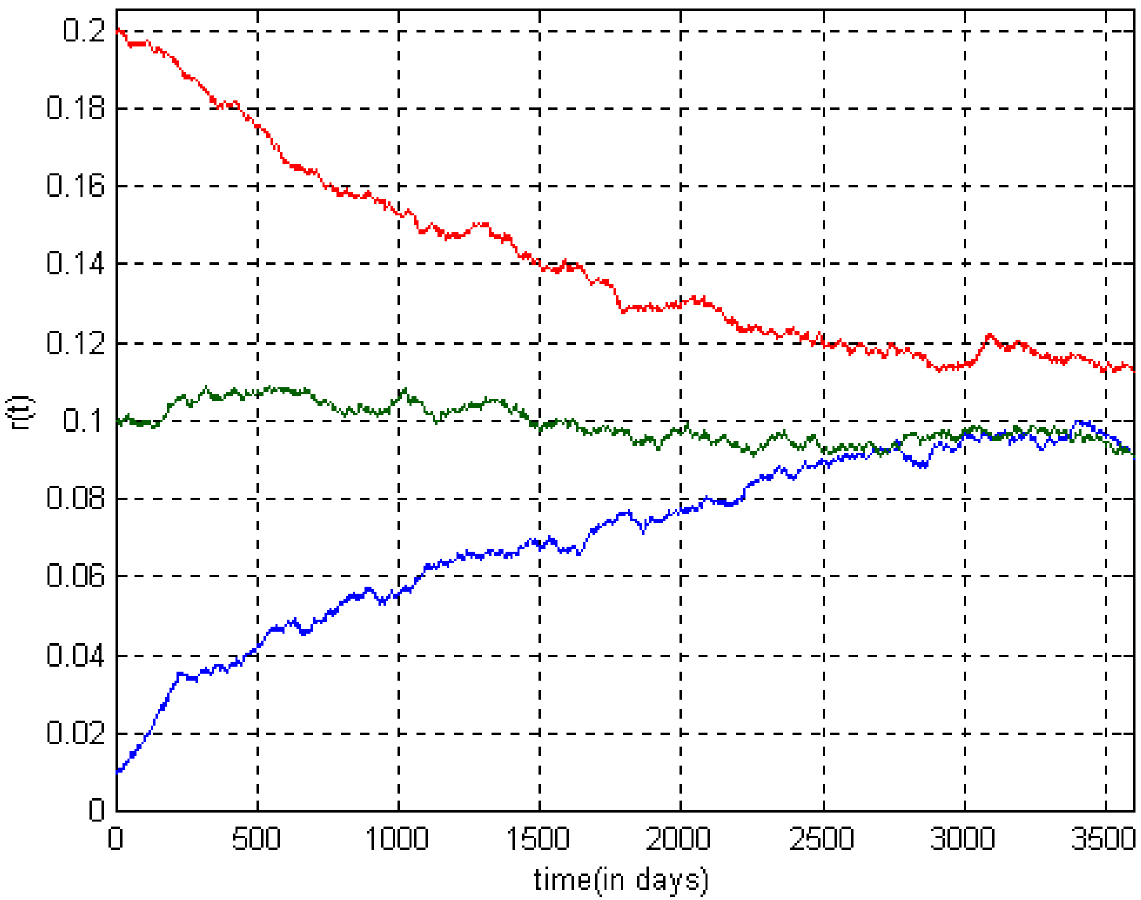
$$P(t,T) = e^{A(t,T) - B(t,T) r_t}$$

$$B(t,T) = \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} \qquad (***)$$

$$A(t,T) = \frac{\left[B(t,T) - (T-t)\right]\left(a^2 b - \sigma^2/2\right)}{a^2} - \frac{\sigma^2 B^2(t,T)}{4a}$$

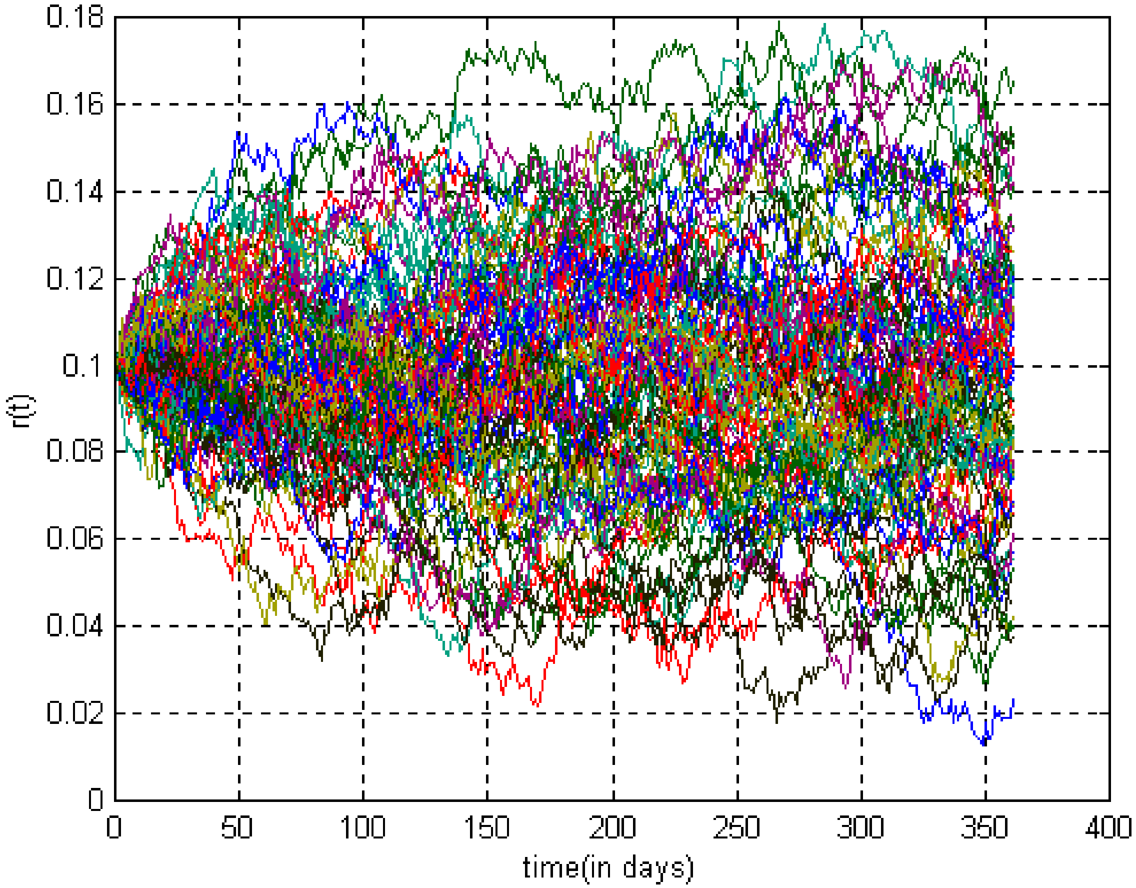
Vasickův model

Simulace



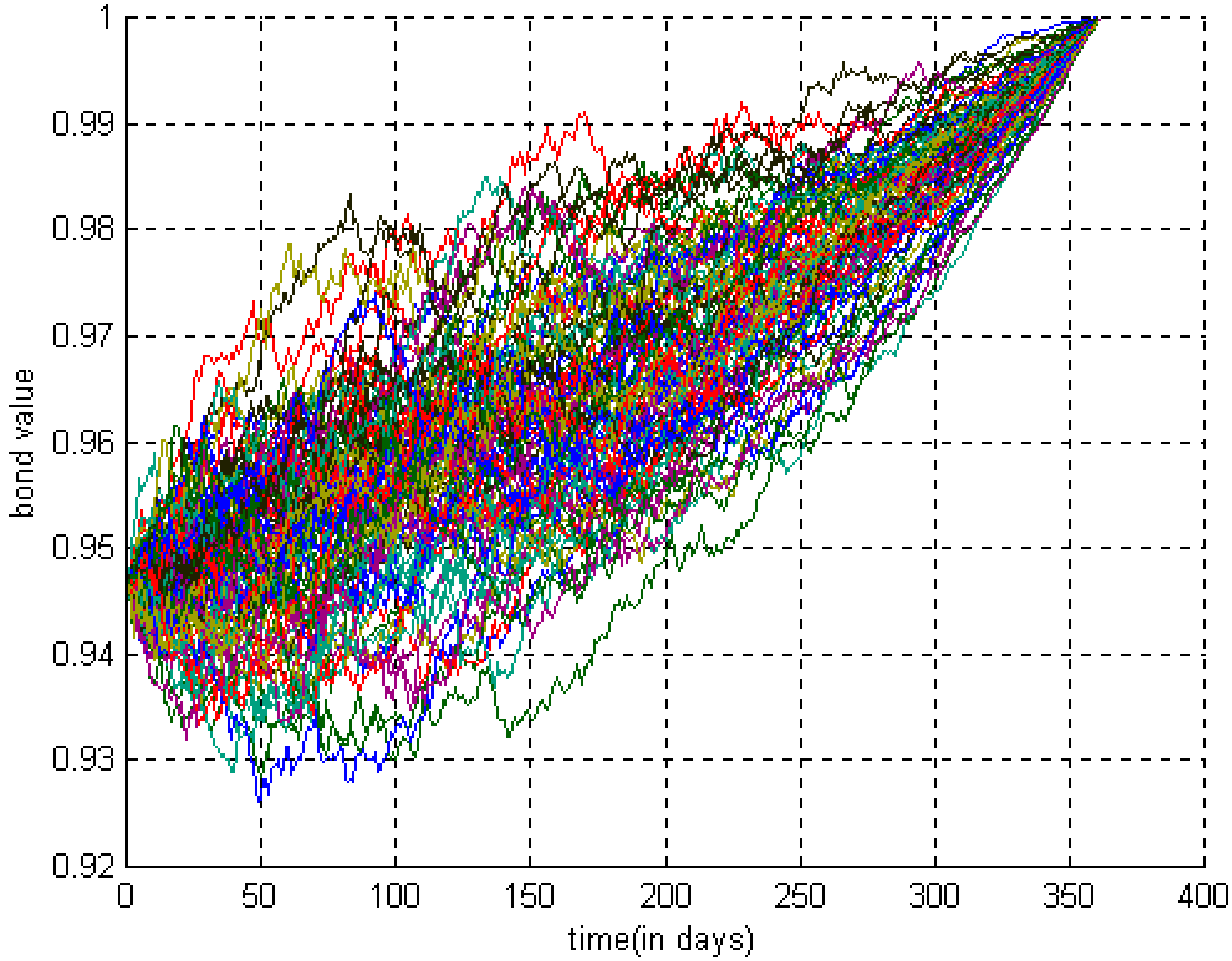
Trajektorie úrokové míry při různých počátečních podmínkách (mean reversion b= 0,1 rychlost reverze a=0,3, T=10).

Vasickův model



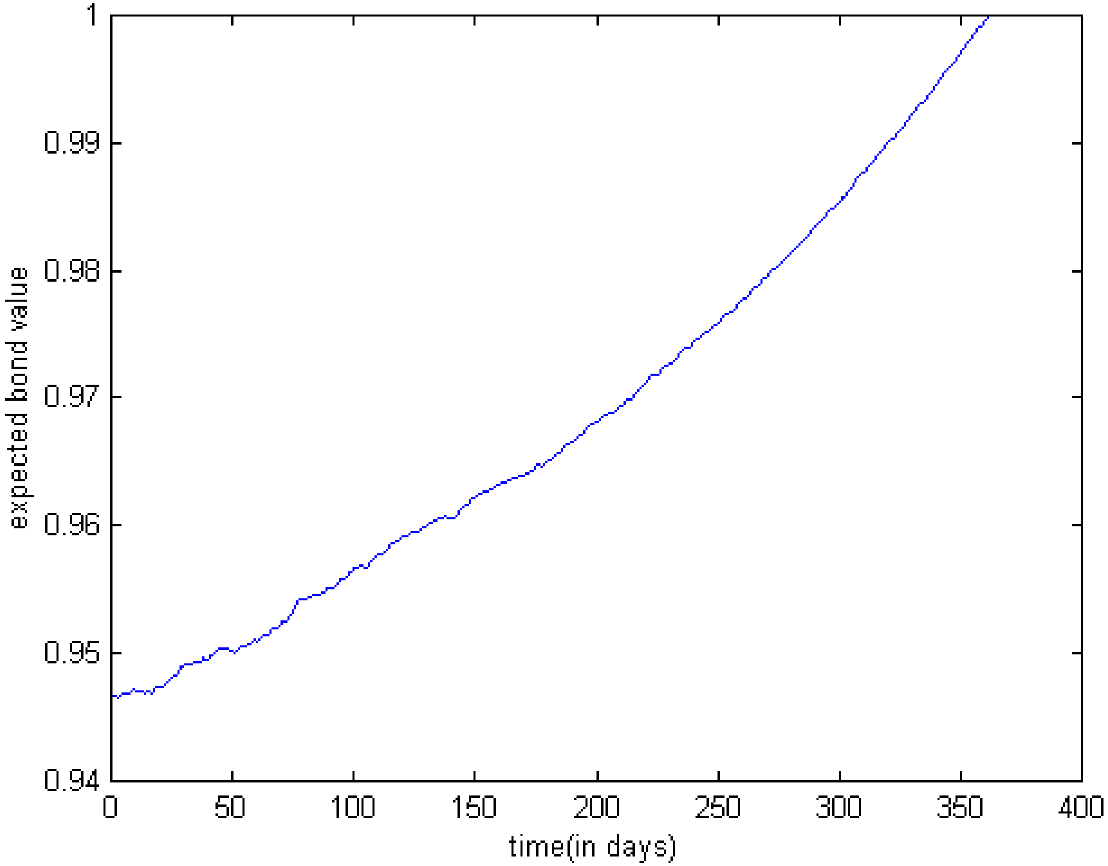
5a) Simulace úrokové míry (100 trajektorií).

Vasickův model



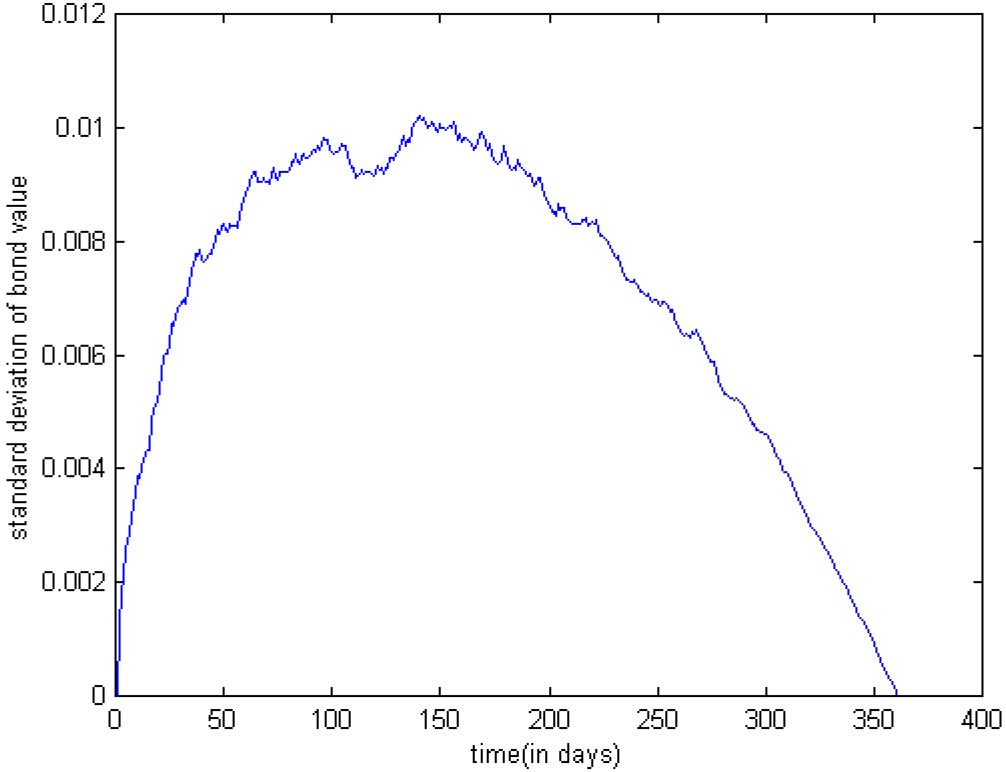
5b) Hodnoty bondů se splatností v čase 360 (odpovídá trajektoriím z obr. 5a).

Vasickův model



Obr. 5c Očekávaná hodnota bondu měřená v čase 0 (odpovídá obr. 5b).

Vasickův model



Volatilita bondu (odpovídá obr. 5b).

Call opce na zero bond

- Zero bond se splatností *T*
- Call opce s dobou expirace S<T, realizační cena K
- K výpočtu použijeme rizikově neutrálních pravděpodobností

$$\text{call}\left(t,T,S,K\right)=E^{Q}\left[e^{-\int_t^S r_s ds}\max\left[P\left(S,T\right)-K,0\right]\right]$$

Call opce na zero bond

$$\mathrm{call}(t,T,S,K) = P(t,T)\,N(h) - KN\left(h-\sigma_p\right)$$

$$\sigma_p = \sigma\sqrt{\frac{1-e^{-2a(T-t)}}{2a}}B(S,T)$$

$$h = \frac{1}{\sigma}\log\left(\frac{P(t,S)}{P(t,T)K}\right) + \frac{\sigma_p}{2}$$

$B(S,T)$ je určeno (***).

Oceňování cap a floor (BS přístup)

- Cap slouží k zabezpečení proti vzestupu úrokové míry
- Floor slouží k zabezpečení proti poklesu úrokové míry
- Podkladovou úrokovou mírou bývá většinou mezibankovní míra (LIBOR, PRIBOR, EURIBOR)

Oceňování cap a floor

- Cap je součtem capletů, floor je součtem floorletů
- Výplata floorlet $L * \tau * \max(r - r_K, 0)$
- Výplata caplet $L * \tau * \max(r_K - r, 0)$

Kde L je nominále, τ je délka periody, *r* podkladová úroková míra a r_K realizační úroková míra

Oceňování cap a floor

- Black 76

$$\text{caplet} = L * \tau * e^{-r_f T} \left[FN(d) - R_K N\left(d - \sigma\sqrt{T}\right)\right]$$

$$d = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \ln\left(\frac{F}{K}\right) + \sigma\frac{\sqrt{T}}{2}$$

Kde *F* je forwardová úroková míra na období τ, σ její volatilita, *T* čas do expirace

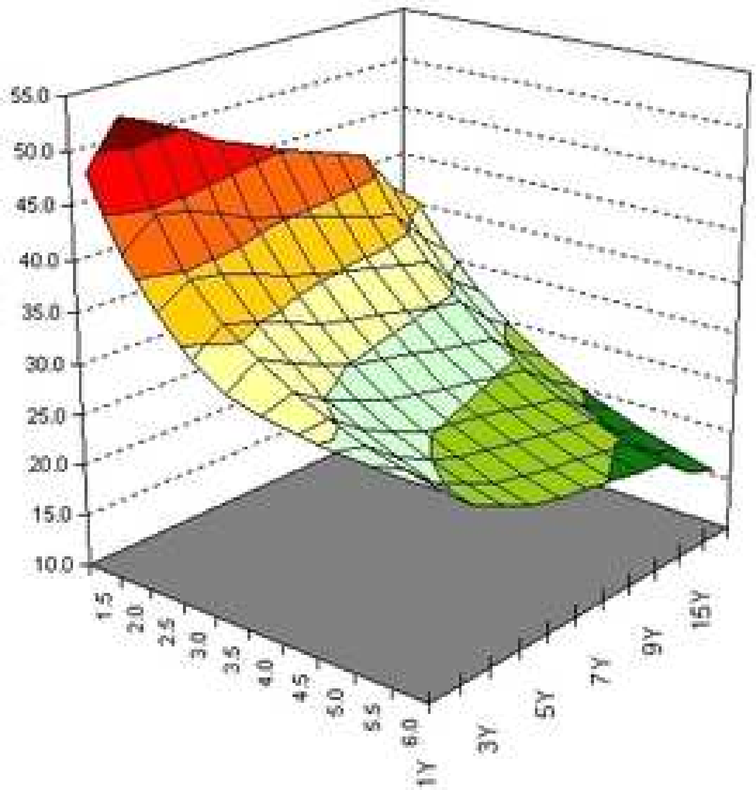
$$\text{cap} = \sum \text{caplet}$$

BS přístup dává při delším období nerealistické výsledky

Pokročilý přístup vychází z modelu LMM (Libor Market Model)

Oceňování cap a floor

- Cap/floor volatility surface



Oceňování opcí se stochastickou volatilitou

- Hlavní předpoklady Black-Scholesova modelu

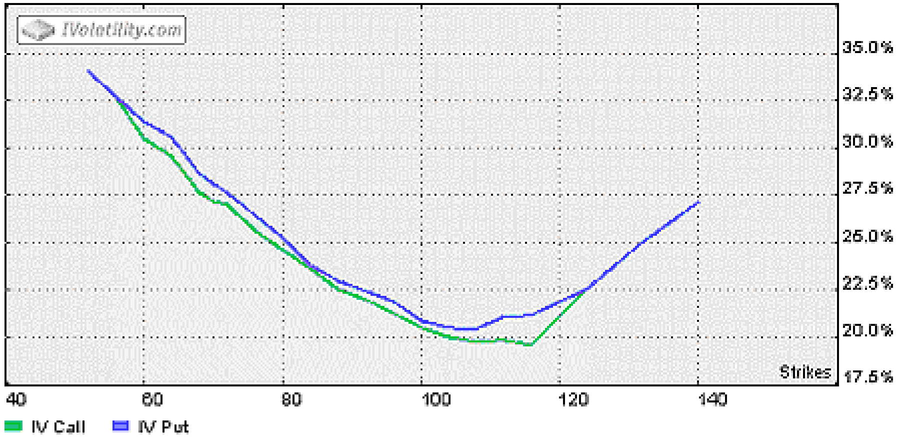
-výnosnosti podkladového instrumentu mají normální rozdělení

-volatilita je konstantní

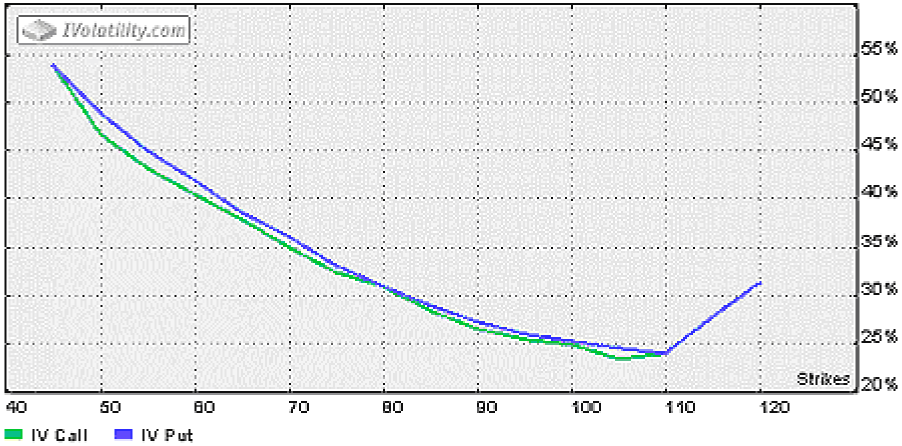
- Důsledek

- Implikovaná volatilita by měla být konstantní

Skutečnost



JPY/EU Zdroj: www.ivolatility.com



IBM Zdroj: www.ivolatility.com

Skutečnost

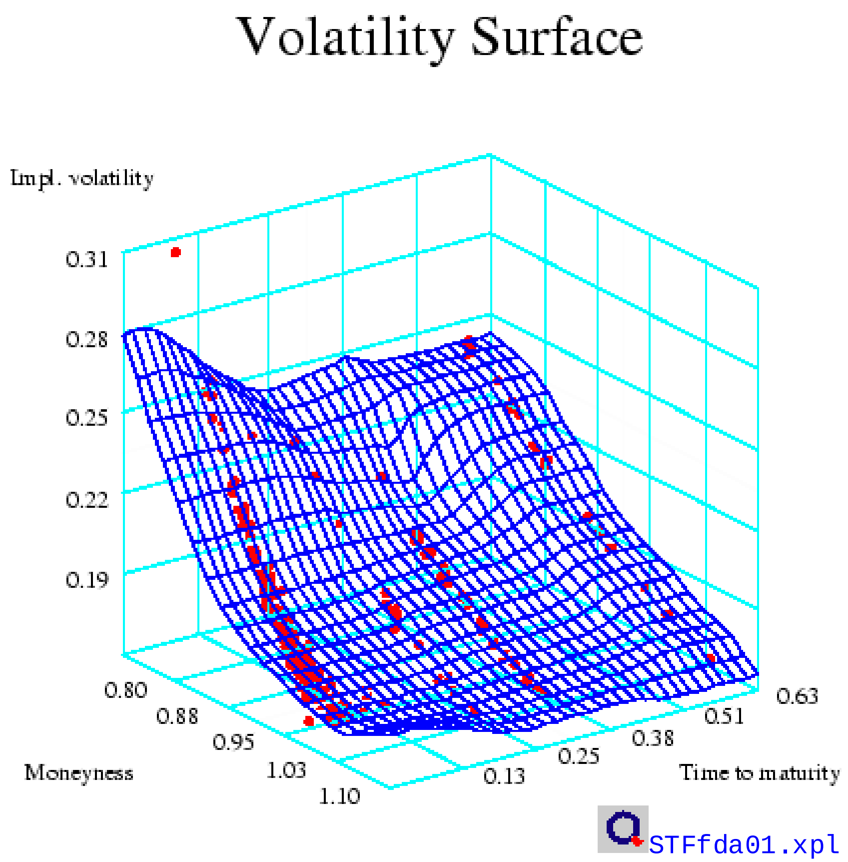


Figure displays the ODAX implied volatilities computed from the BS .
ODAX:.European options on the German stock index

Předpokládejme, že cena derivátu závisí na dvou podkladových instrumentech

$$f_j(t, \theta_1, \theta_2),$$

kde

$$d\theta_i = m_i \theta_i dt + s_i \theta_i dW_i \quad i = 1, 2$$

$$\operatorname{corr}(W_1, W_2) = \rho$$

Podle vícerozměrné Itoovy formule platí

$$df_j = \mu_j f_j dt + \sigma_{1j} f_j dW_1 + \sigma_{2j} f_j dW_2$$

$$\mu_j f_j = \frac{\partial f_j}{\partial t} + \frac{\partial f_j}{\partial \theta_j} m_1\theta_1 + \frac{\partial f_j}{\partial \theta_j} m_2\theta_2 + \frac{1}{2} s_1^2\theta_1^2 \frac{\partial^2 f_j}{\partial \theta_1^2}$$

$$+\frac{1}{2} s_2^2\theta_2^2 \frac{\partial^2 f_j}{\partial \theta_2^2} + +\rho \frac{1}{2} s_1 s_2 \theta_1 \theta_2 \frac{\partial^2 f_j}{\partial \theta_1 \partial \theta_2}$$

$$\sigma_{1j} f_j = \frac{\partial f_j}{\partial \theta_j} s_1\theta_1$$

$$\sigma_{2j} f_j = \frac{\partial f_j}{\partial \theta_j} s_2\theta_2$$

Pomocí tří již obchodovatelných derivátů sestavíme bezrizikové portfolio

$$\Pi = k_1 f_1 + k_2 f_2 + k_3 f_3$$

$$k_1\sigma_{11} f_1 + k_2\sigma_{12} f_2 + k_3\sigma_{13} f_3 = 0 \quad (1)$$

$$k_1\sigma_{21} f_1 + k_2\sigma_{22} f_2 + k_3\sigma_{23} f_3 = 0 \quad (2)$$

Protože portfolio je bezrizikové, musí platit

$$d\Pi = \left(k_1\mu_1 f_1 + k_2\mu_2 f_2 + k_3\mu_3 f_3\right)dt$$

$$d\Pi = \Pi r dt$$

$$k_1\mu_1 f_1 + k_2\mu_2 f_2 + k_3\mu_3 f_3 = r\left(k_1 f_1 + k_2 f_2 + k_3 f_3\right)$$

$$k_1 f_1\left(\mu_1 - r\right) + k_2 f_2\left(\mu_2 - r\right) + k_3 f_3\left(\mu_3 - r\right) = 0 \qquad (3)$$

Protože ne všechna k_j jsou nulová, musí být rovnice závislé. Tedy po úpravě

$$\mu - r = \lambda_1\sigma_1 + \lambda_2\sigma_2$$

Stochastická volatilita (Heston)

Rovnice akcie

$$dS(t) = \mu S(t)\,dt + \sqrt{v(t)}\,S(t)\,dW_1(t)$$

Rovnice volatility (rozptylu)

$$d\nu(t) = \kappa\left(\theta - \nu(t)\right)dt + \sigma\, dW_2(t)$$

$$dC = \mu C dt + \sigma_{C1} f dW_1 + \sigma_{C2} f dW_2$$

$$\mu_C C = \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial C}{\partial S}\mu S + \frac{\partial C}{\partial \nu}\kappa\left(\theta - \nu\right) + \frac{1}{2}\nu S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2}$$

$$+ \frac{1}{2}\sigma^2 \nu \frac{\partial^2 C}{\partial \nu^2} + \frac{1}{2}\rho\sigma\nu S \frac{\partial^2 C}{\partial S \partial \nu} \quad (4)$$

$$\sigma_{C1} C = \frac{\partial C}{\partial S} S\sqrt{\nu} \quad (5)$$

$$\sigma_{C2} C = \frac{\partial C}{\partial \nu}\sigma\sqrt{\nu} \quad (6)$$

$$\mu_C - r = \lambda_1 \sigma_{C1} + \lambda_2 \sigma_{C2}$$

Vynásobme poslední rovnost *C* a dosaďme výrazy (4), (5), (6).

$$\frac{\partial C}{\partial t}+\frac{\partial C}{\partial S}\left(\mu-\lambda_1\sqrt{\nu}\right)S+\frac{\partial C}{\partial \nu}\left[\kappa\left(\theta-\nu\right)-\lambda_2\sigma\sqrt{\nu}\right]+\frac{1}{2}\nu S^2\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}$$
$$+\frac{1}{2}\sigma^2\nu\frac{\partial^2 C}{\partial \nu^2}+\rho\sigma\nu\frac{\partial^2 C}{\partial S\partial \nu}=rC$$

Podkladová akcie je obchodovatelná, a proto

$$\mu-\lambda_1\sqrt{\nu}=r$$

Volatilita obchodovaná není. Tržní cena rizika volatility musí být zjištěna z již obchodovaných derivátů.

Předpokládejme, že

$$\lambda_2 \sigma \sqrt{\nu} = \lambda \nu$$

Dosazením máme

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial C}{\partial S} rS + \frac{\partial C}{\partial \nu}\left[\kappa\left(\theta - \nu\right) - \lambda \nu\right] + \frac{1}{2}\nu S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + \frac{1}{2}\sigma^2 \nu \frac{\partial^2 C}{\partial \nu^2} + \rho\sigma\nu S \frac{\partial^2 C}{\partial S \partial \nu} = rC \qquad (5)$$

Okrajová podmínka:

$$C\left(S\left(T\right), T, K\right) = \max\left(S\left(T\right) - K, 0\right)$$

Řešení rovnice (5)

Zavedením substituce $x = \log(S)$ dostáváme

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial C}{\partial x}\left(r - \frac{1}{2}\nu\right) + \frac{\partial C}{\partial \nu}\left[\kappa(\theta - \nu) - \lambda\nu\right] + \frac{1}{2}\nu\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$$

$$+ \frac{1}{2}\sigma^2\nu\frac{\partial^2 C}{\partial \nu^2} + \rho\sigma\nu\frac{\partial^2 C}{\partial x \partial \nu} = rC \qquad (6)$$

Předpokládejme řešení ve tvaru

$$C\left(S,\nu,T-t\right)=SP_1\left(S,\nu,T-t\right)-Ke^{-\left(T-t\right)}P_2\left(S,\nu,T-t\right)$$

Dosazením do (6) dostáváme, že P_j musí splňovat rovnice

$$\frac{\partial P_j}{\partial t}+\left(r+u_j\nu\right)\frac{\partial P_j}{\partial x}+\left(a-b_j\nu\right)\frac{\partial P_j}{\partial \nu}+\frac{1}{2}\nu\frac{\partial^2 P_j}{\partial x^2}$$

$$+\rho\sigma\nu\frac{\partial^2 P_j}{\partial x\partial \nu}+\frac{1}{2}\sigma^2\nu\frac{\partial^2 P_j}{\partial \nu^2}=0$$

$$u_1=\frac{1}{2},\ u_2=-\frac{1}{2},\ a=\kappa\theta,\ b_1=\kappa+\lambda-\rho\sigma,\ b_2=\kappa+\lambda$$

Okrajová podmínka $P_j\left(x,\nu,T\right)=1_{\left\{x\geq log\left(K\right)\right\}}$

P_j jako rizikově neutrální pravděpodobnosti

Uvažujme stochastické procesy

$$dx_t = \left(r + u_j \nu_t\right) dt + \sqrt{\nu_t}\, dW_t^1$$

$$d\nu_t = \left(a - b_j \nu_t\right) dt + \sigma \sqrt{\nu_t}\, dW_t^2$$

Mějme funkci $g\left(x, \nu\right)$

$$f_j\left(x, \nu, t\right) = \mathrm{E}\left[g\left(x\left(T\right), \nu\left(T\right)\right) \middle| x\left(t\right) = x, \nu\left(t\right) = \nu \right]$$

Podle Itoovy formule

$$df_j = \frac{\partial f_j}{\partial t} + \left(r + u_j \nu\right)\frac{\partial f_j}{\partial x} + \left(a - b_j \nu\right)\frac{\partial f_j}{\partial \nu} + \frac{1}{2}\nu \frac{\partial^2 f_j}{\partial x^2}$$

$$+\rho\sigma\nu \frac{\partial^2 f_j}{\partial x \partial \nu} + \frac{1}{2}\sigma^2 \nu \frac{\partial^2 f_j}{\partial \nu^2} + \sqrt{\nu}\frac{\partial f_j}{\partial x} dW_1 + \sigma\sqrt{\nu}\frac{\partial f_j}{\partial \nu} dW_2$$

f_j musí být martingal , a proto drift musí být nulový

$$\frac{\partial f_j}{\partial t} + \left(r + u_j \nu\right)\frac{\partial f_j}{\partial x} + \left(a - b_j \nu\right)\frac{\partial f_j}{\partial \nu} + \frac{1}{2}\nu \frac{\partial^2 f_j}{\partial x^2}$$

$$+\rho\sigma\nu \frac{\partial^2 f_j}{\partial x \partial \nu} + \frac{1}{2}\sigma^2 \nu \frac{\partial^2 f_j}{\partial \nu^2} = 0$$

Okrajová podmínka $f_j\left(x,\nu,T\right) = g\left(x,\nu\right)$

Tato rovnice je stejná jako pro P_j

Jestliže volíme

$$g(x,\nu) = 1_{\{x \geq \log(K)\}}$$

budou f_j

podmíněnými pravděpodobnostmi

$$P_j(x,\nu,t,\log(K)) = P\{x(T) \geq \log(K) \mid x(t) = x, \nu(t) = \nu\}$$

Řešení neexistuje v uzavřené formě

Volme proto

$$g(x,v) = \exp(i\Phi x)$$

f_j jsou charakteristické funkce

Řešení hledáme ve tvaru

$$f_j(x,v,T) = \exp\left(A_j(T-t) + B_j(T-t)v + i\Phi x\right)$$

A_j, B_j splňuji dvě obyčejné diferenciální rovnice

$$-B_j'(\tau) + iu_j\phi - b_jB_j - \frac{1}{2}\Phi^2 + i\rho\sigma\Phi B_j + \frac{1}{2}\sigma^2 B_j^2 = 0$$

$$-A_j'(\tau) + i\tau\Phi + aB_j = 0$$

vzhledem

$$A_j(0) = 0, \quad B_j(0) = 0$$

Řešením je

$$f_j\left(x,\nu,T;\Phi\right)=\exp\left(A_j\left(T-t;\Phi\right)+B_j\left(T-t;\Phi\right)v+i\Phi x\right)$$

$$A_j\left(\tau;\Phi\right)=ir\Phi\tau+\frac{a}{\sigma^2}\left\{\left(b_j-i\rho\sigma\Phi+d_j\right)\tau-2\log\left(\frac{1-g_je^{d_j\tau}}{1-g_j}\right)\right\}$$

$$B_j\left(\tau;\Phi\right)=\frac{b_j-i\rho\sigma\Phi+d_j}{\sigma^2}\left\{\frac{1-e^{d_j\tau}}{1-g_je^{d_j\tau}}\right\}$$

$$g_j=\frac{b_j-i\rho\sigma\Phi+d_j}{b_j-i\rho\sigma\Phi-d_j}$$

$$d_j=\sqrt{\left(i\rho\sigma\Phi-b_j\right)^2-\sigma^2\left(2iu_j\Phi-\Phi^2\right)}$$

Pravděpodobnosti P_j získáme inverzní Fourierovou transformací

$$P_j\left(x,\nu,t;\log\left(K\right)\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \mathrm{Re}\left[\frac{e^{-i\Phi\log\left(K\right)}f_j\left(x,\nu,T;\Phi\right)}{i\Phi}\right]d\Phi$$

Rizikově neutrální dynamika v Hestonově modelu

Podle Girsanovovy věty jsou náhodné procesy $\tilde{W}_1(t)$, $\tilde{W}_2(t)$ Wienerovy procesy při pravděpodobnostní míře Q :

$$d\tilde{W}_1(t) = dW_1(t) - \lambda_1 dt$$
$$d\tilde{W}_2(t) = dW_2(t) - \lambda_2(S, \upsilon, t)\, dt$$

$$\frac{dQ}{dP} = \exp\left\{-\frac{1}{2}\int_0^t \left(\lambda_1^2 - \lambda_2^2(S,\upsilon,t)\right) ds - \int_0^t \lambda_1 dW_1(s) - \int_o^t \lambda_2(S,\upsilon,s)\, dW_2(s)\right\}$$

Rizikově neutrální dynamika v Hestonově modelu je

$$dS_t = rS_t dt + \sqrt{\upsilon_t} S_t d\tilde{W}_1(t)$$
$$d\upsilon_t = \kappa^*\left(\theta^* - \upsilon_t\right) dt + \sigma\sqrt{\upsilon_t}\, d\tilde{W}_2(t)$$

$$\operatorname{corr}\left(\tilde{W}_1, \tilde{W}_2\right) = \rho$$

$$\kappa^* = \kappa + k\sigma\nu(t)$$
$$\theta^* = \frac{\kappa\theta}{\kappa + k\sigma\nu(t)}$$

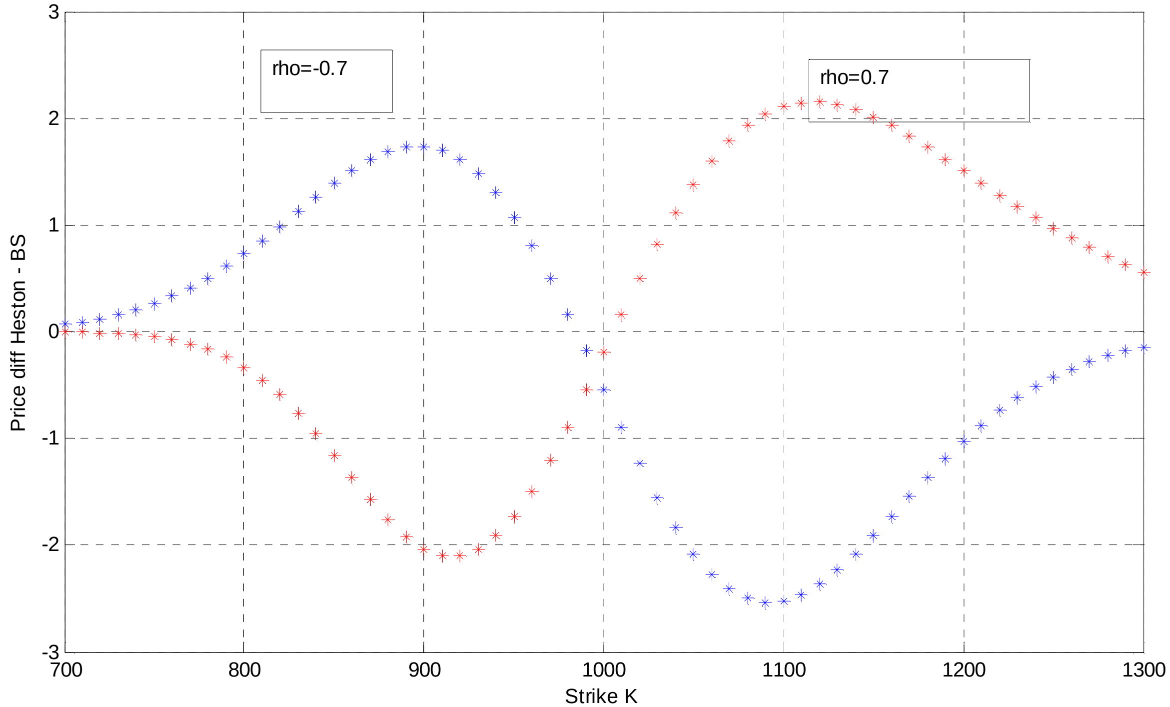
Cena opce je rizikově neutrálním světě

$$C(S,T,K,\nu) = E^Q\left[e^{rT}\max\left(S(T) - K, 0\right)\right] \qquad (11)$$

Rozdíl cen call opcí v Hestonově a Black-Scholesově modelu

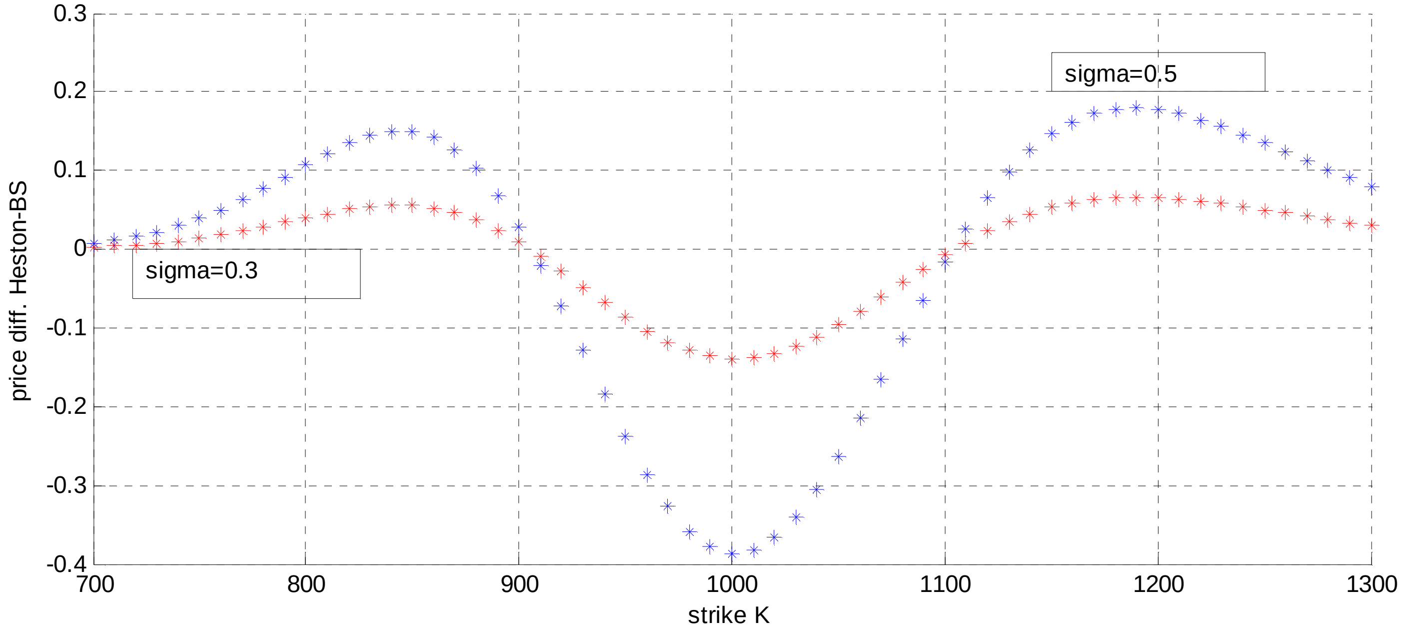
- Hodnoty vstupních parametrů

$$S = 1000,\ \kappa = 1, \theta = 0.1, \lambda = 0,\ r = 0,\ T = 0.1, v(0) = 0.1, \sigma = 0.5$$



Rozdíl cen call opcí v Hestonově a Black-Scholesově modelu

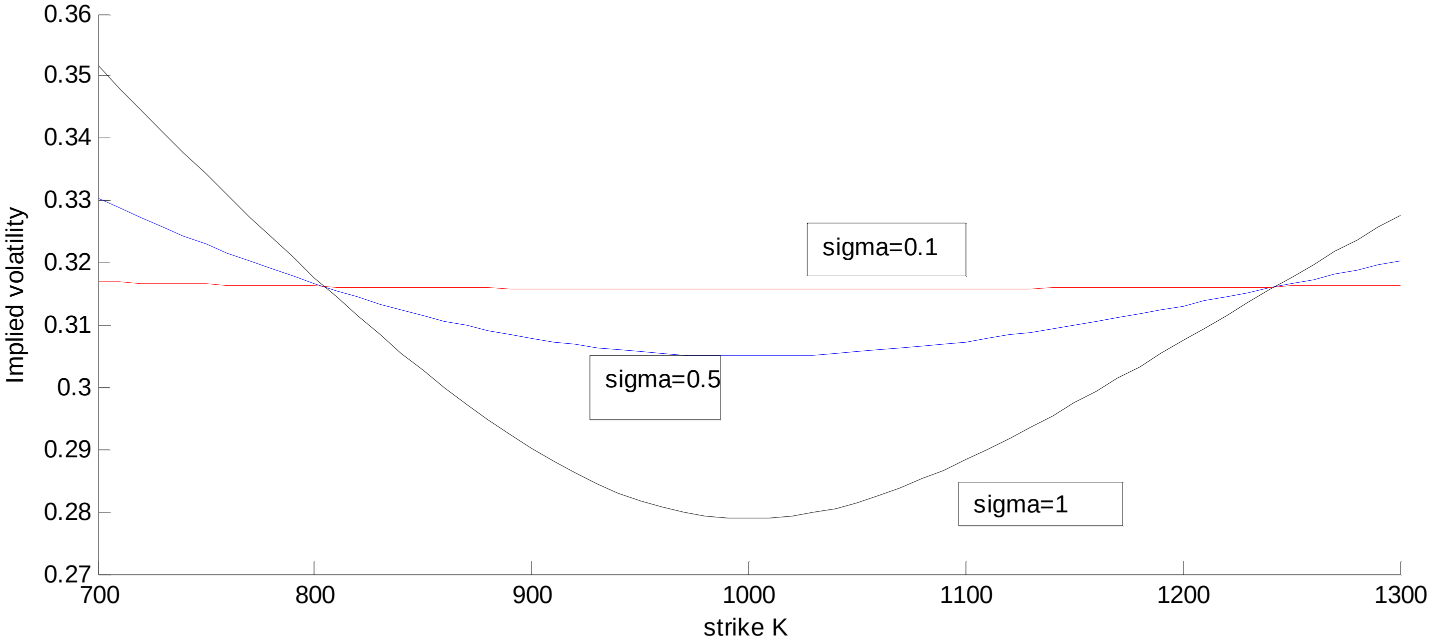
- Rozdíl cen call opcí v Hestonově a BS modelu při nulové korelaci



Volatility smile

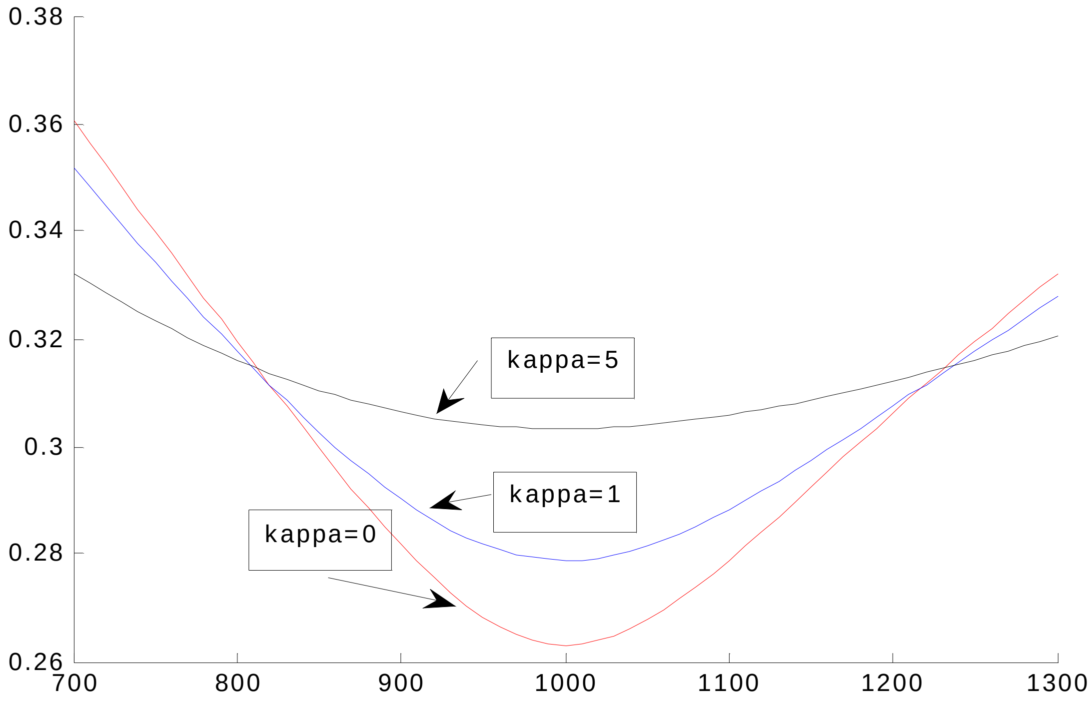
- Vstupní parametry

$$S = 1000,\ \theta = 0{,}1,\ \lambda = 0,\ r = 0,\ T = 0{,}5, v(0) = 0{,}1,\ \mathrm{rho} = 0$$



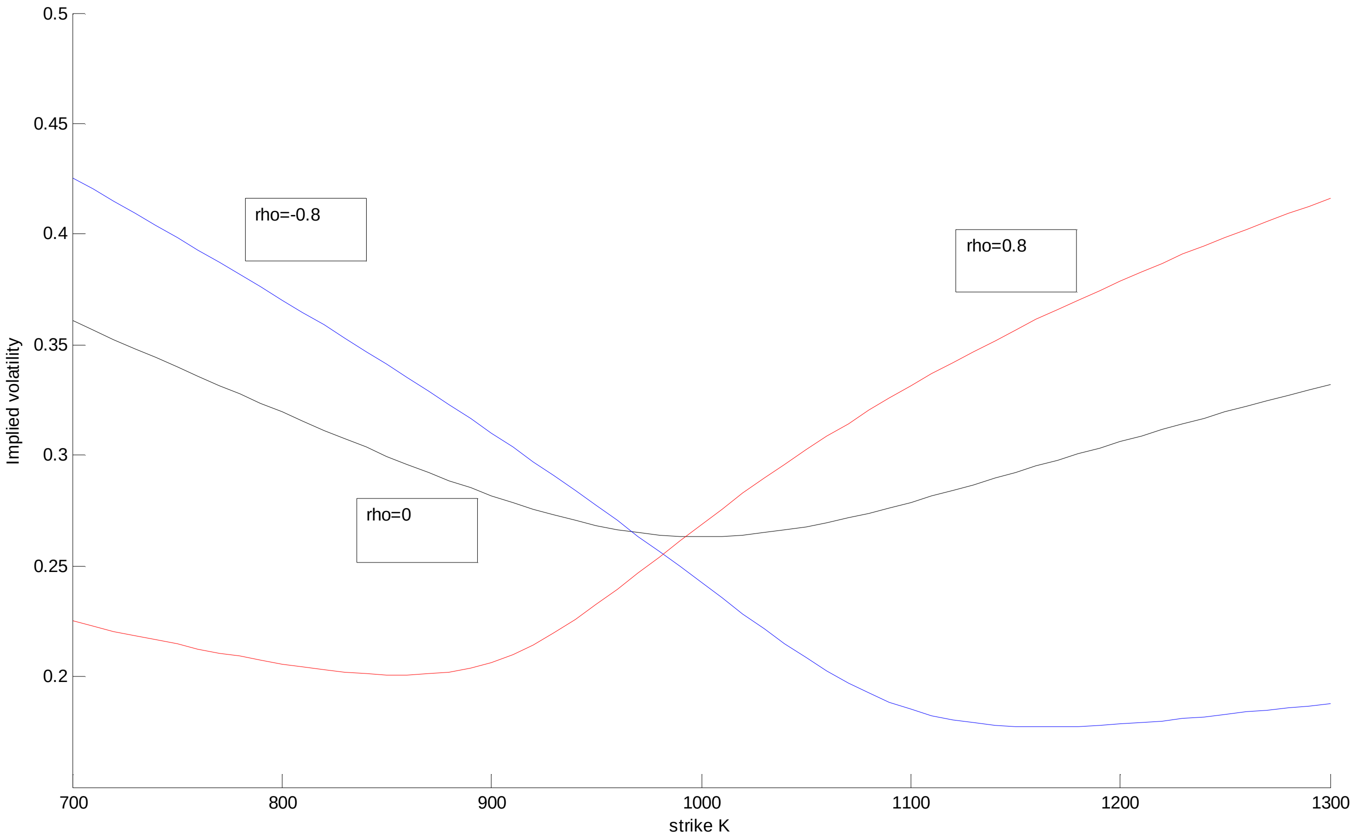
Vliv volatility volatility (parametr sigma) na tvar smilu

Volatility smile



Vliv rychlosti přizpůsobení mean reversion (parametr kappa) na tvar smilu

Volatility smile



Vliv korelace mezi kurzem akcie a volatilitou na tvar smilu

Volatility smile

- Parametry sigma a kappa ovlivňují křivost smilu, i když každý trochu jiným způsobem. Rostoucí volatilita volatility a rostoucí rychlost přizpůsobení zvyšuje křivost smilu
- Korelace ovlivňuje sklon smilu. Při pozitivní korelaci má smile kladný sklon, při negativní je sklon záporný.
- Úroveň smilu ovlivňuje rovnovážná úroveň volatility (parametr theta)

Další modely SV

- SABR (populární v praxi, aplikovatelný jen na krátká období)
- Hull-Whiteův model (předpokládá nekorelovatelnost volatility a kurzu)
- Stein&Stein model
- Dupireho model lokální volatility

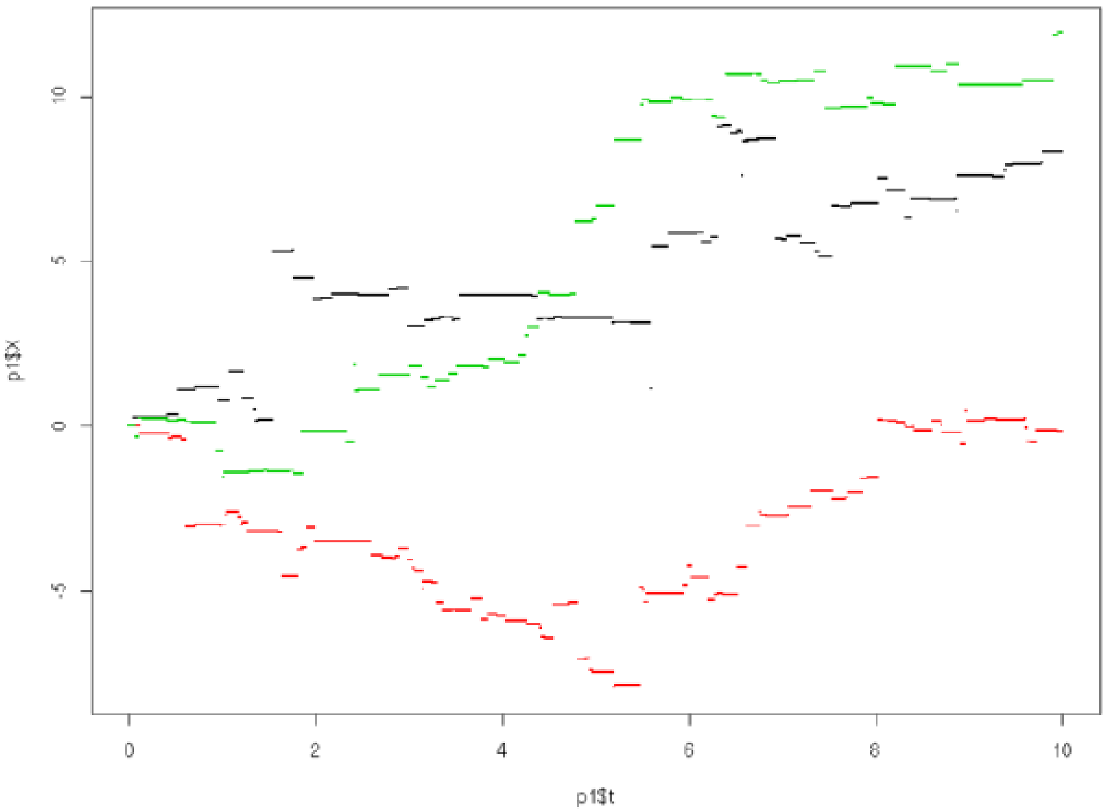
Variance –gamma procesy

- V rámci dne informace přicházejí v náhodných okamžicích
- Každé informaci odpovídá náhodná změna ceny podkladového aktiva (akcie)
- Počet příchozích informací je náhodný

$$\Downarrow$$

- Uzavírací cena je náhodným součtem náhodných změn

Variance gamma proces
je ve své podstatě Wienerův proces s náhodným časem.
(Čas má gamma rozdělení)



three sample paths of varinace-gamma levy processes

Variance gamma proces

Hodnota evropské call opce

$$\begin{aligned}\operatorname{call}(S,t,K) &= S\Psi\left(d\sqrt{\frac{1-c_1}{\nu}},(\alpha+s)\sqrt{\frac{1-\nu}{c_1}},\frac{t}{\nu}\right)\\ &\quad -K\exp(-rt)\Psi\left(d\sqrt{\frac{1-c_2}{\nu}},\alpha s\sqrt{\frac{1-\nu}{c_2}},\frac{t}{\nu}\right)\end{aligned}$$

Variance-gamma proces

kde
$$d = \frac{1}{s}\left[\log\left(\frac{S}{K}\right) + rt + \frac{t}{\nu}\log\left(\frac{1-c_1}{1-c_2}\right)\right]$$

$$\alpha = \varsigma s,\ \ \varsigma = -\frac{\theta}{\sigma^2},\ s = \frac{\sigma}{\sqrt{1+\left(\frac{\theta}{\sigma}\right)^2 \frac{\upsilon}{2}}}$$

$$c_1 = \frac{\nu(\alpha+s)^2}{2}\ ,\ \ c_2 = \frac{\nu\alpha^2}{2}$$

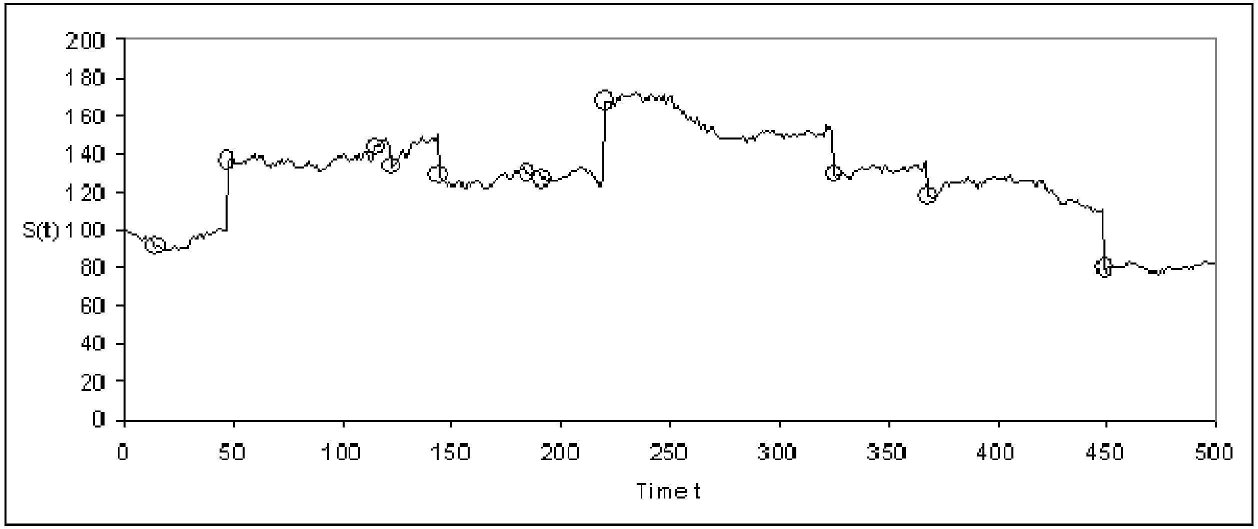
$$\Psi(a,b,\chi) = \int_0^\infty N\left(\frac{a}{\sqrt{u}} + b\sqrt{u}\right)\frac{u^{\gamma-1}\exp(-u)}{\Gamma(\chi)}du$$

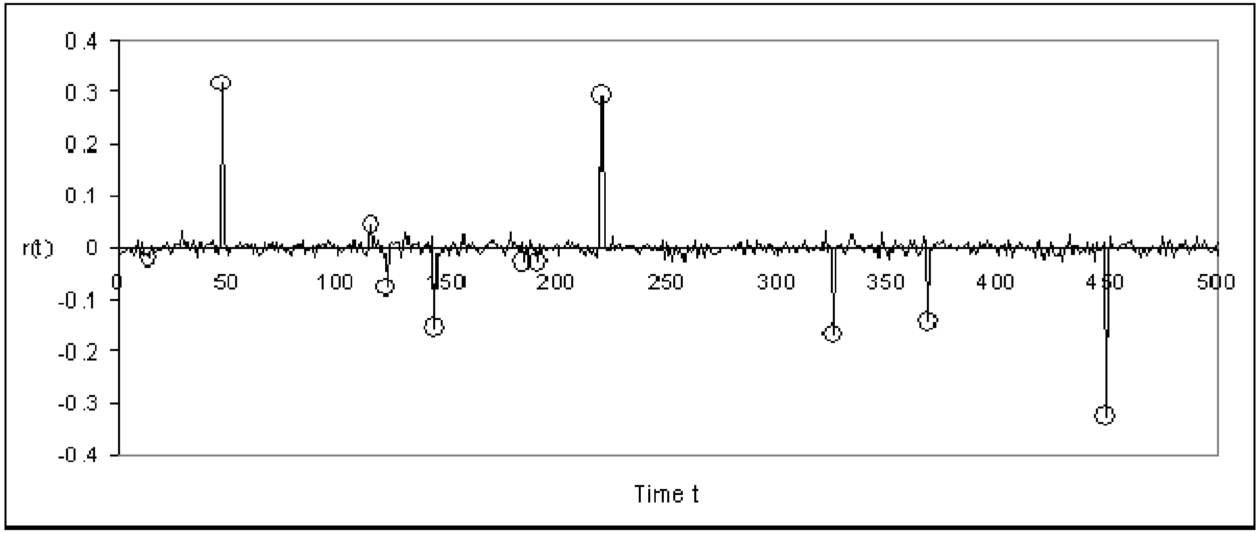
Jump-diffusion proces

- Kombinace geometrického Brownova pohybu a složeného Poissonova procesu
- Složený Poissonův proces:

  Velikost skoku je náhodná,obvykle má normální rozdělení nebo obecně dvojité exponenciální rozdělení (též nazývané Laplaceovo)

Jump-diffusion proces





Aplikace modelů SV

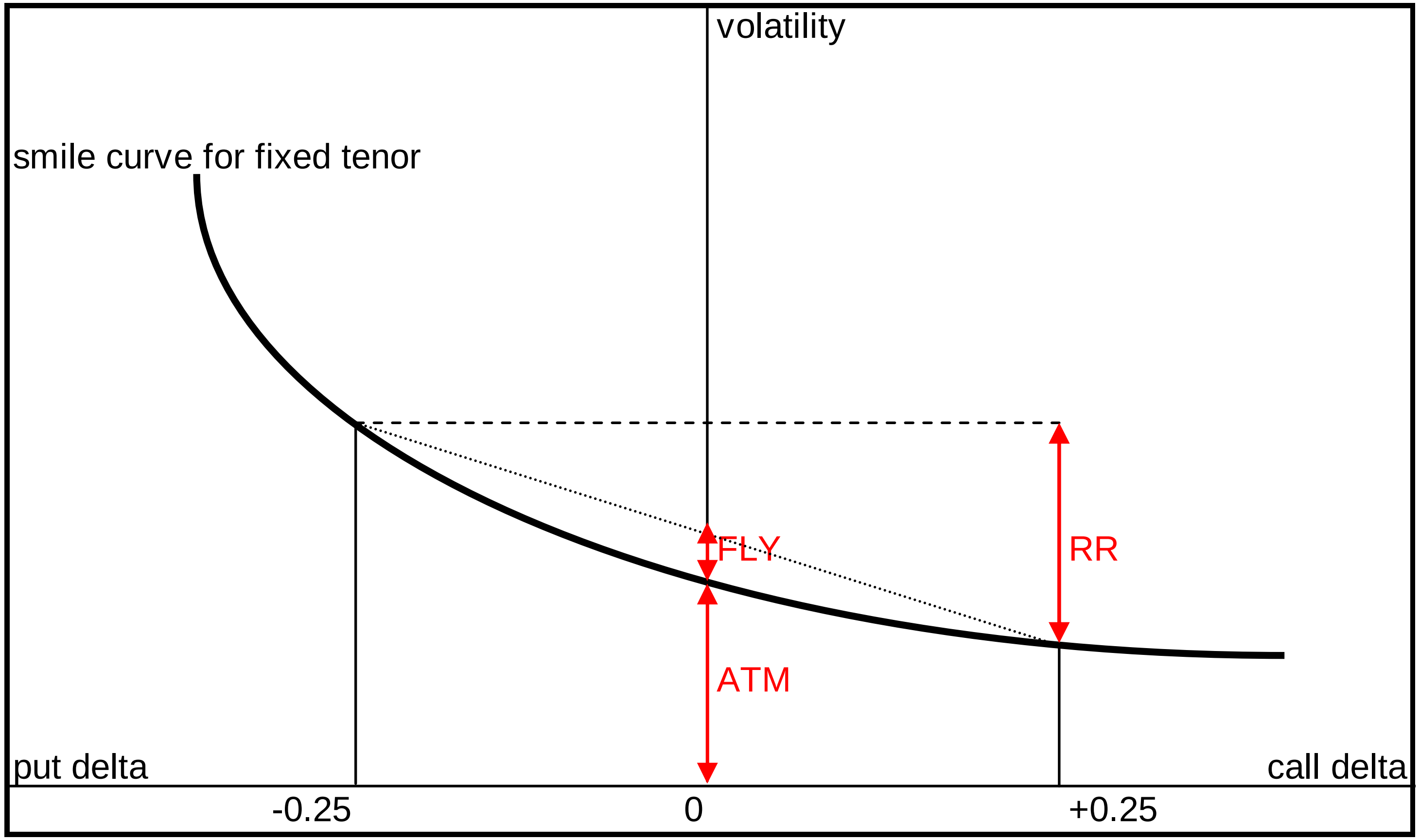
- V praxi se požívají obchodované plain vanila opce k získávání vstupních parametrů a ty pak složí k oceňování exotických opcí a opcí uváděných na trh.

Kotace měnových opcí

OTC Currency Option Quotes

- The five option quotes at each maturity are:
  1. Implied volatility of a delta-neutral straddle (ATMV)
     - A straddle is the sum of a call with a put at the same strike.
     - Delta-neutral means $\delta(c) + \delta(p) = 0 \Rightarrow N(d_+) = 0.5 \Rightarrow d_+ = 0$.
     - ATMV $\equiv$ IV(50 δ c) (= IV(-50 δ p) by put call parity).
  2. 25-delta risk reversal (RR25)
     - $RR25 \equiv IV(25\delta c) - IV(25\delta p)$.
     - Captures the slope of the smile, which proxies the `skewness` of the risk-neutral return distribution.
  3. 25-delta strangle margin (a.k.a butterfly spread) (SM25)
     - A strangle is the sum of a call and a put at two different strikes.
     - $SM25 \equiv (IV(25\delta c) + IV(25\delta p))/2 - ATMV$.
     - Captures the curvature of the smile (`kurtosis of the distribution`).
  4. 10-delta RR and 10-delta SM.

Kotace měnových opcí



Zdroj: Jakub Mertlík, ING

Kotace měnových opcí

Convert Quotes to Option Prices

- Convert the quotes into implied volatilities at the five deltas:

$$\begin{aligned}
IV(0\delta s) &= ATMV; \\
IV(25\delta c) &= ATMV + RR25/2 + SM25; \\
IV(25\delta p) &= ATMV - RR25/2 + SM25; \\
IV(10\delta c) &= ATMV + RR10/2 + SM10; \\
IV(10\delta p) &= ATMV - RR10/2 + SM10.
\end{aligned}$$

- Download LIBOR and swap rates on USD, JPY, and GBP to generate the relevant yield curves (r_d, r_f).

- Convert deltas into strike prices

$$K = F \exp\left[\mp IV(\delta,\tau)\sqrt{\tau}N^{-1}\left(\pm e^{r_f\tau}\delta\right) + \frac{1}{2}IV(\delta,\tau)^2\tau\right].$$

- Convert implied volatilities into out-of-the-money option prices using the BS formulae.

Literatura

- Hull J.: *Options, Futures, and Other Derivatives*
- Málek J. : *Oceňování opcí* (skripta VŠE)
- Málek J. : *Dynamika úrokových měr a úrokové deriváty*, 2005, (Ekopress)

Děkuji za pozornost
(malek@vse.cz)